Modul L : Lineare Algebra

↳ Behandelt (ggf. mehrere) Gleichungen, die lediglich linear von unbekannten Variablen abhängen, z.B.

$$a x + b y = k \qquad \text{mit } a, b, k \in \mathbb{R} \text{ konstant}$$

und Unbekannte $x, y \in \mathbb{R}$.

Beispiel: Wir suchen die Werte für x, y, die gleichzeitig

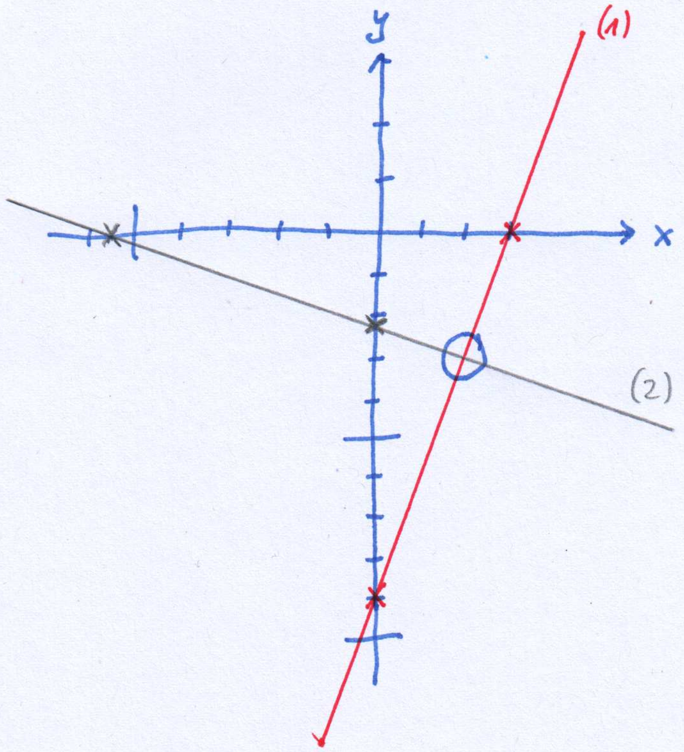
$$\boxed{\begin{array}{ll} 1) & 3x - y = 9 \\ 2) & 2x + 5y = -11 \end{array}}$$

erfüllen.

↳ Eine Gl. mit n Unbekannten hat $(n-1)$ dimensionalen Lösungsraum.

(1) $3x - y = 9 \iff y = 3x - 9$ beschreibt eine Gerade.

(2) $2x + 5y = -11 \iff y = -\frac{2}{5}x - \frac{11}{5}$ · beschreibt eine andere Gerade



Beide Gleichungen werden eindeutig am Schnittpunkt der Geraden

$$\boxed{x = 2, \quad y = -3}$$

gelöst.

Algebraische Lösungsverfahren

A) Einsetzverfahren: Löse eine Gleichung nach einer Unbekannten auf, und setze in die übrigen Gleichungen ein.

$$3x - y = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 + \tfrac{1}{3} y$$

Einsetzen in $2x + 5y = -11$:

$$\begin{aligned}
& 2\left(3 + \tfrac{1}{3} y\right) + 5y = -11 \\
\Leftrightarrow \quad & 6 + \tfrac{2}{3} y + 5y = -11 \\
\Leftrightarrow \quad & 6 + \left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{15}{3}\right) y = -11 \\
\Leftrightarrow \quad & 6 + \tfrac{17}{3} y = -11 \quad \Big| -6 \\
\Leftrightarrow \quad & \tfrac{17}{3} y = -17 \quad \Big| \cdot \tfrac{3}{17}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{y = -3}$$

Einsetzen in

$$\begin{aligned}
x &= 3 + \tfrac{1}{3} y \\
&= 3 + \tfrac{1}{3}(-3) \\
&= 3 - 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{x = 2}$$

B) Eliminierungsverfahren (Gauß): Eine geeignete Linearkombination beider Gleichungen ist unabhängig von einer der Unbekannten.

$$\begin{aligned}
3x - y &= 9 \quad \Big| \cdot 2 \\
2x + 5y &= -11 \quad \Big| \cdot (-3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6x - 2y &= 18 \\
-6x - 15y &= 33
\end{aligned}$$

Summe beider Gleichungen:

$$-17y = 51 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y = -3} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x = 2}$$

__Beispiel__ für lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten:

$$\left|\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & 3z & = & 10 \\ 3x & - & 2y & - & 2z & = & 4 \\ 4x & - & 5y & + & z & = & 6 \end{array}\right.$$

A) Einsetzverfahren:
- Löse erste Gl. nach z auf.
- Setze z in zweite und dritte Gl. ein.
- Jetzt 2 Gl. mit 2 Unbekannten: x, y.

B) Eliminierung: „Dreiecksform" oder „Zeilenstufenform"

$$\left|\begin{array}{rcrcrcrl} 2x & - & 3y & + & 3z & = & 10 & \mid \cdot 6 \\ 3x & - & 2y & - & 2z & = & 4 & \mid \cdot (-4) \\ 4x & - & 5y & + & z & = & 6 & \mid \cdot (-3) \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{rcrcrcrl} 12x & - & 18y & + & 18z & = & 60 & \\ -12x & + & 8y & + & 8z & = & -16 & + \\ -12x & + & 15y & - & 3z & = & -18 & + \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{rcrcrcrl} 12x & - & 18y & + & 18z & = & 60 & \mid :6 \\ & & -10y & + & 26z & = & 44 & \mid :2 \\ & & -3y & + & 15z & = & 42 & \mid :3 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{rcrcrcrl} 2x & - & 3y & + & 3z & = & 10 & \\ & & -5y & + & 13z & = & 22 & \\ & & -y & + & 5z & = & 14 & \mid \cdot (-5) \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{rcrl}
2x - 3y + 3z & = & 10 & \\
-5y + 13z & = & 22 & \\
5y - 25z & = & -70 & \big)+
\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{rcr}
2x - 3y + 3z & = & 10 \\
-5y + 13z & = & 22 \\
-12z & = & -48
\end{array}\right.$$

Dreiecksform

Nun sukzessives Lösen: $\boxed{z = 4}$

$\Rightarrow \; -5y + 52 = 22 \;\Rightarrow\; -5y = -30 \;\Rightarrow\; \boxed{y = 6}$

$\Rightarrow \; 2x - 18 + 12 = 10 \;\Rightarrow\; 2x = 16 \;\Rightarrow\; \boxed{x = 8}$

↳ <u>Schreibweisen</u>: Da die Struktur der Gleichungen immer gleich bleibt, und sich nur die Koeffizienten ändern:

$$\left[\begin{array}{rcr}
2x - 3y + 3z & = & 10 \\
3x - 2y - 2z & = & 4 \\
4x - 5y + z & = & 6
\end{array}\right. \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r}
2 & -3 & 3 & 10 \\
3 & -2 & -2 & 4 \\
4 & -5 & 1 & 6
\end{array}\right)$$

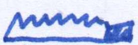
bzw. Matrixschreibweise

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{v}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\vec{b}} \quad , \qquad M\vec{v} = \vec{b}$$

üblich

↪ Matrixmultiplikation nach Holzfäller Art ☺

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



$$\begin{array}{c} (x \quad y \quad z) \\ \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} \uparrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-3y+3z \\ 3x-2y-2z \\ 4x-5y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

↪ „Elementare Zeilenoperationen", um z.B. auf Dreiecksform zu kommen,

(#)
- * Multiplizieren einer Gleichung (Zeile) mit einem Skalar (Zahl)
- * Addieren zweier Gleichung, ersetze eine der involvierten Gleichungen.
- * Vertauschen zweier Gleichungen

ändern <u>nicht</u> die Lösung des Gleichungssystems.

(#) Spezialfall: Ersetzung einer Gleichung durch die Summe dieser Gleichung mit dem Vielfachen einer anderen Gleichung.

Beispiele Dreiecksform ja oder nein?

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

✓ ↯ ↯

c) **Cramersche Regel**

Löse $A\vec{x} = \vec{k}$: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & k_2 \end{array}\right) Z2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} Z1$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} & k_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} k_1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{a_{11}}} \left(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \right) x_2 = \cancel{\frac{1}{a_{11}}} \left(a_{11} k_2 - a_{21} k_1 \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{a_{11} k_2 - a_{21} k_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}}$$

Einsetzen, oder andersherum nochmal lösen mit x_2 eliminiert:

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & k_2 \end{array}\right) Z2 - \frac{a_{22}}{a_{12}} Z1$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ a_{21} - \frac{a_{22}}{a_{12}} a_{11} & 0 & k_2 - \frac{a_{22}}{a_{12}} k_1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow -\cancel{\frac{1}{a_{12}}} \left(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \right) x_1 = -\cancel{\frac{1}{a_{12}}} \left(a_{22} k_1 - a_{12} k_2 \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{a_{22} k_1 - a_{12} k_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}}$$

Also das Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}}_{\vec{k}}$$

wird gelöst durch

$$x_1 = \frac{a_{22} k_1 - a_{12} k_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11} k_2 - a_{21} k_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

↳ Der Nenner involviert nur Einträge der Matrix A.

Def: Die Determinante von A ist:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

⇒ Eine eindeutige Lösung von $A\vec{x} = \vec{k}$ existiert nur, wenn $\det(A) \neq 0$.

↳ Auch die Zähler können als Determinante geschrieben werden:

$$D_1 = \begin{vmatrix} k_1 & a_{12} \\ k_2 & a_{22} \end{vmatrix} = k_1 a_{22} - k_2 a_{12} \longrightarrow x_1 = \frac{D_1}{\det(A)}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & k_1 \\ a_{21} & k_2 \end{vmatrix} = a_{11} k_2 - a_{21} k_1 \Longrightarrow x_2 = \frac{D_2}{\det(A)}$$

$$\boxed{\text{„Cramersche Regel"} : \qquad x_1 = \frac{D_1}{\det(A)} , \qquad x_2 = \frac{D_2}{\det(A)}}$$

Diese Regel funktioniert sogar für <u>n x n Matrizen</u> bzw. Gleichungssysteme :

- * Berechne $D = \det(A)$
- * ersetze die i-te Spalte von A mit dem Lösungsvektor $\vec{k}$, und berechne D_i = Determinante dieser Matrix.
- * $x_i = \frac{D_i}{D}$

↳ Wie sieht die Determinante einer 3x3 Matrix aus ?

$$\det(B) = \left| \begin{array}{ccc|cc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{31} & b_{32} \end{array} \right.$$

$$= b_{11} b_{22} b_{33} + b_{12} b_{23} b_{31} + b_{13} b_{21} b_{32}$$
$$- b_{31} b_{22} b_{13} - b_{32} b_{23} b_{11} - b_{33} b_{21} b_{12}$$

↳ Ab 4x4 wird es komplizierter. (siehe unten)

↳ Determinanten existieren nur für n x n Matrizen („quadratische Matrizen")

↪ ich nenne die Methode zur Berechnung einer 3×3 (oder 2×2) Matrizen die

„Jägerzaun - Methode“

↪ Lösung existiert nur eindeutig, wenn $\det(A) \neq 0$.

<u>Bsp:</u>

$$\left| \begin{array}{l} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 41 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 41 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 0$$

Tatsächlich sind die Gleichungen

$$\left| \begin{array}{l} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{array} \right. \quad \text{„linear abhängig“.}$$

(später mehr dazu)

Vorgeschmack auf Uni-Mathe

Sei A eine $n \times n$ Matrix, also

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Die Determinante von A ist eine Summe mit $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ Summanden, wobei jeder Summand ein Produkt aus n ~~E~~Elementen der Matrix ist. In diesen Produkten ist jeweils genau ein Element aus jeder Reihe und jeder Spalte.

$$a_{1m_1} a_{2m_2} a_{3m_3} \cdots \cdot a_{nm_n}$$

mit $(m_1, m_2, .., m_n)$ eine „Permutation" der Zahlen $(1, 2, \ldots, n)$. z.B. für $n=3$:

$P = (m_1, m_2, m_3)$	Anzahl Vertauschungen	$\mathrm{Sgn}(P) = (-1)^{\text{Anzahl V.}}$
$(1, 2, 3)$	$0, 2, 4, \ldots$	$+1$
$(2, 3, 1)$	$2, 4, 6, \ldots$	$+1$
$(3, 1, 2)$	$2, 4, 6, \ldots$	$+1$
$(3, 2, 1)$	$3, 5, 7, \ldots$	-1
$(2, 1, 3)$	$1, 3, 5, 7, \ldots$	-1
$(1, 3, 2)$	$1, 3, 5, 7, \ldots$	-1

nicht eindeutig.

eindeutig!

Dann ist $$\boxed{\mathrm{Det}(A) = \underbrace{\sum_{\substack{\text{Permutationen} \\ P \text{ von } (1,\dots,n)}}}_{n! \text{ Stück}} \mathrm{Sgn}(P)\; a_{1m_1} a_{2m_2} \cdot \ldots \cdot a_{nm_n}}$$

Also für $\underline{n = 3:}$

$$\mathrm{Det}(A) = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}$$
$$- a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}$$

Für $\underline{n = 2:}$ Vgl. Jägerzaun.

$$\mathrm{Det}(A) = + a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

Für $\underline{n = 1:}$ $A = (a_{11})$, $\det A = a_{11}$

↳ Für $n = 4$ gibt es $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Terme

↳ Für $n = 5$ gibt es $5! = 5 \cdot 4! = 120$ Terme

Operationen mit Matrizen

↳ Wir betrachten nun allgemeine $m \times n$ Matrizen, also Gruppierungen von Zahlen in m Zeilen und n Spalten.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

↳ Schließt Spezialfälle mit ein:

<u>$n = 1$</u> : $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ Ein Spaltenvektor mit m Komponenten

<u>$m = 1$</u> : $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$ Ein Zeilenvektor mit n Komponenten

<u>$n = m$</u> : Eine quadratische Matrix

↳ „Transponieren" vertauscht alle Spalten mit allen Zeilen.

z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

↪ Matrizen des gleichen Typs können addiert werden.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{pmatrix}$$

Dabei ist die Reihenfolge egal, $A + B = B + A$

⇒ kommutativ, da die Addition der Komponenten kommutativ ist.

⇒ assoziativ $(A + B) + C = A + (B + C)$

ebenso von Komponenten geerbt.

↪ Matrizen können mit einem Skalar (Zahl) multipliziert werden:

$$\overset{\substack{\text{Matrix} \\ \downarrow}}{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Skalar}}}{k}} \cdot A = k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k a_{11} & k a_{12} & k a_{13} \\ k a_{21} & k a_{22} & k a_{23} \end{pmatrix}$$

kommutativ : $kA = Ak$

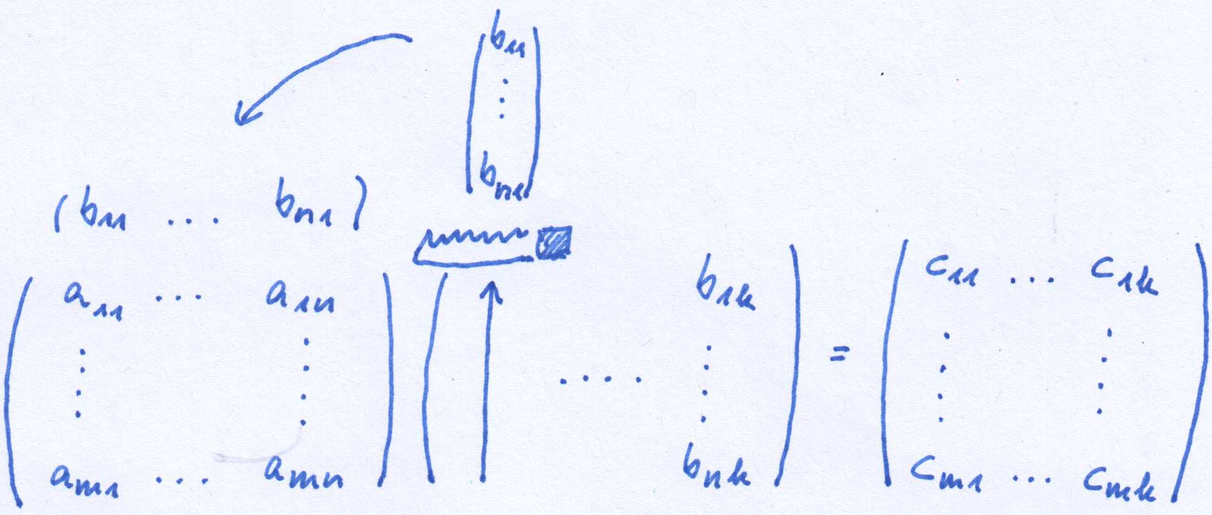
assoziativ : $k(lA) = (kl)A = klA$

distributiv : $(k + l)A = kA + lA$

$k(A + B) = kA + kB$.

↪ Zwei Matrizen können, wenn geeignet (kommt gleich) miteinander multipliziert werden à la Holzfäller

↪ Die Matrixmultiplikation funktioniert nur, wenn die Anzahl der Spalten der ersten Matrix auf die Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix paßt.



$$\begin{array}{ccc} A & B & = \quad C \\ [\underset{=}{m}\times\boxed{n}] & [\boxed{n}\times \underset{''''}{k}] & [\underset{=}{m}\times\underset{''''}{k}] \end{array}$$

muß passen!

z.B. $A\vec{v} = \vec{k}$

$$[\underset{=}{n}\times n][n\times \underset{''''}{1}] = [n\times 1]$$

paßt ✓

↳ ACHTUNG: Im Allgemeinen vertauscht die Reihenfolge bei der Matrixmultiplikation <u>nicht</u>! $AB \neq BA$

↳ Nur spezielle Matrizen kommutieren, z.B.

$A \mathbb{1} = \mathbb{1} A = A$ für eine n×n Matrix

und $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$

↳ Es ist hilfreich (wenn auch gewöhnungsbedürftig) Komponentenschreibweise zu benutzen:

$[A]_{ij} = a_{ij}$, die „i-j-te Komponente von A".

z.B. Addition $[A+B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij}$

Mult. mit Skalar λ $\quad [\lambda A]_{ij} = \lambda [A]_{ij}$

Matrixmult. $[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{i\textcircled{k}} [B]_{\textcircled{k}j}$

↖ Dummy-Index

↳ Damit läßt sich z.B. schnell zeigen, daß $(AB)^T = B^T A^T$, denn

$$[(AB)^T]_{ij} = [AB]_{ji} = \sum_k [A]_{jk} [B]_{ki}$$

$$= \cancel{k} \sum_k [A^T]_{kj} [B^T]_{ik}$$

$$= \sum_k [B^T]_{i\textcircled{k}} [A^T]_{\textcircled{k}j}$$

$$= [B^T A^T]_{ij} \, .$$

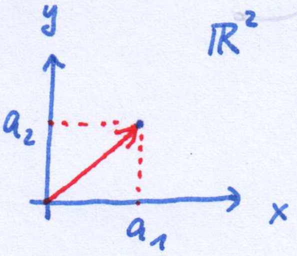
Wir betrachten nun Matrizen mit nur <u>einer</u> Spalte

$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, die wir <u>Vektoren</u> nennen. Die Komponenten

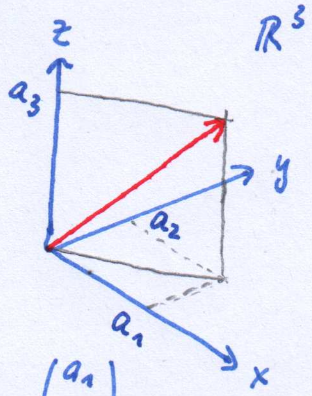
sind reellwertig, also $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1..n$

Die Menge aller solcher Vektoren, zusammen mit den schon besprochenen Operationen, wird „Vektorraum" oder besser reeller Vektorraum genannt, und mit $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

↪ Wir denken uns einen Pfeil, der vom Ursprung zu einem Punkt im $\mathbb{R}^n$ zeigt.



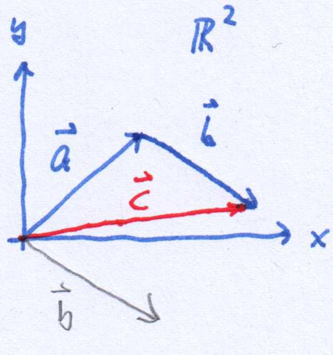
bzw.



$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

↪ Vektoren können (wie auch schon Matrizen) addiert werden $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

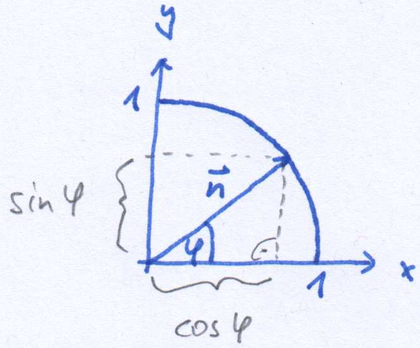


d.h. $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$

↪ Vektoren können durch Multiplikation mit einem Skalar gestaucht oder gestreckt werden.

$$\lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$$

z.B. $\vec{v} = |\vec{v}| \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}}_{\vec{n}}$



wobei $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

↪ Definition <u>Skalarprodukt</u> : $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^T \vec{b} = (\cdots)\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

ist eine „bilineare" Abbildung von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

d.h. $(\vec{a} + \lambda \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \lambda\, \vec{b} \cdot \vec{c}$

$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \lambda \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \lambda\, \vec{a} \cdot \vec{c}$

↪ Insbesondere ist

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 = |\vec{a}| \cos\varphi$$

Allgemein ist $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}))$

⟹ Die Aussage $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$\iff \vec{a} \perp \vec{b}$

↳ Die Länge eines Vektors $\vec{a}$ ist somit bestimmt durch $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$

$$\Rightarrow \quad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

↳ Im $\mathbb{R}^3$ kennen Sie zusätzlich das Kreuzprodukt (Vektorprodukt), welches eine bilineare Abb. $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ist

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

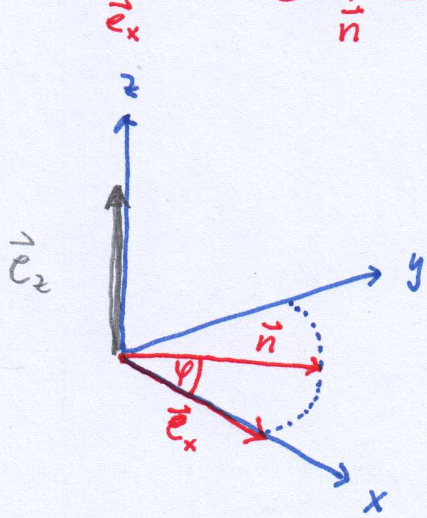
↳ Leicht nachzurechnen: $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

$\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

$\Rightarrow$ $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf sowohl $\vec{a}$ als auch $\vec{b}$.

↳ Insbesondere ist

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_x} \times \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{n}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \sin\varphi \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_z}$$

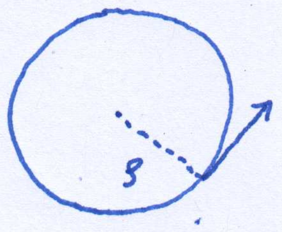


Allgemein:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin\left(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})\right)$$

Anwendungen des Vektorprodukts

↪ Kreisbahn eines Objekts



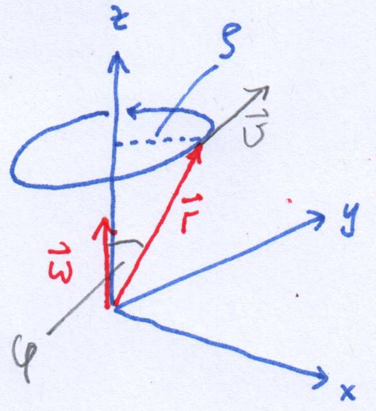
mit Umlaufzeit T,

Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{360°}{T} = \frac{2\pi}{T}$$

⇒ Geschwindigkeit $v = \frac{2\pi\rho}{T} = \frac{2\pi}{T}\rho = \omega\rho$

In 3D Konstruktion:

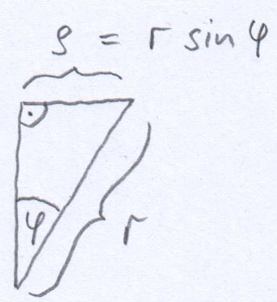


Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega} = \omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

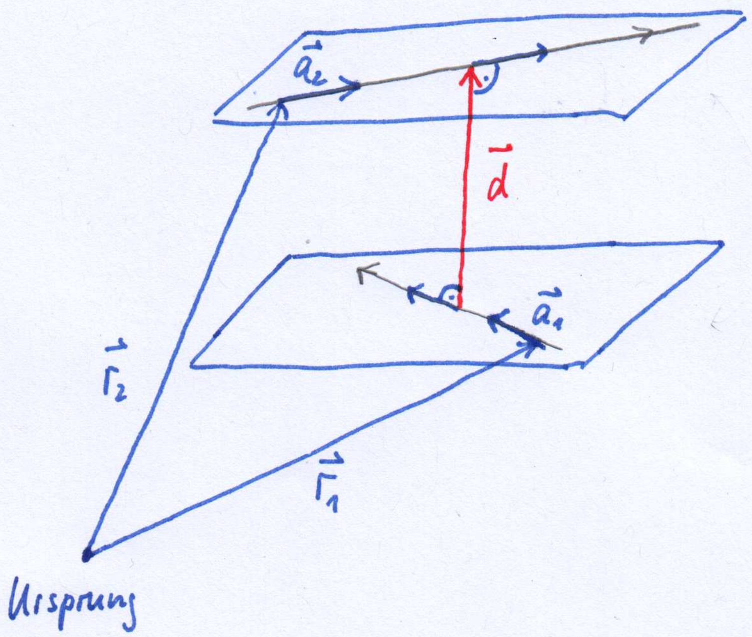
Dann ist $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ in Tangentialrichtung der Bahn

$\vec{v} \perp \vec{\omega}$ und $\vec{v} \perp \vec{r}$



$$\Rightarrow \quad |\vec{v}| = |\vec{\omega}| \underbrace{|\vec{r}| \sin\varphi}_{\rho}$$

Kürzester Abstand zweier Flugbahnen (Geraden)



2. Gerade : $\underbrace{\vec r_1 + \nu \vec a_1}$

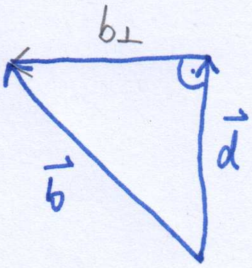
Oops, umgekehrt ↕

1. Gerade : $\overbrace{\vec r_2 + \mu \vec a_2}$

↳ Dann ist das Lot parallel zur Richtung

$$\vec a_1 \times \vec a_2 = \vec n$$

↳ Jeglicher Vektor, der mit seinen Enden die beiden Geraden berührt, hat entlang $\vec n$ den Betrag $\vec d$.



also $\vec b = \vec d + \vec b_\perp$

, mit $\vec d = \lambda \vec n$ und $\vec b_\perp \perp \vec n$

$$\Rightarrow \quad \vec b = \lambda \vec n + \vec b_\perp \quad | \cdot \vec n$$

$$\Rightarrow \quad (\vec n \cdot \vec b) = \lambda (\vec n \cdot \vec n) + \underbrace{\vec b_\perp \cdot \vec n}_{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\vec n \cdot \vec b}{\vec n \cdot \vec n}$$

Wähle $\vec b = \vec r_2 - \vec r_1$

$$\rightarrow \quad \vec d = \lambda \vec n = \frac{\vec n \cdot \vec b}{\vec n \cdot \vec n} \vec n \quad \Rightarrow \quad |\vec d| = \frac{|\vec n \cdot \vec b|}{|\vec n|} = \frac{|(\vec a_1 \times \vec a_2) \cdot (\vec r_2 - \vec r_1)|}{|\vec a_1 \times \vec a_2|}$$

↳ Warum darf ich einfach $\vec{b} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ wählen?

Für bestimmte μ, ν gilt:

$$\vec{d} = (\vec{r}_2 + \mu \vec{a}_2) - (\vec{r}_1 + \nu \vec{a}_1)$$

$$= \underbrace{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}_{\vec{b}} + \mu \vec{a}_2 - \nu \vec{a}_1$$

Da $\vec{d}$ parallel zu $\vec{n} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$ ist, und

$\vec{n} \perp \vec{a}_1$ und $\vec{n} \perp \vec{a}_2$ folgt

$$\vec{n} \cdot \vec{d} = \vec{n} \cdot \vec{b} + \mu \underbrace{\vec{n} \cdot \vec{a}_2}_{0} - \nu \underbrace{\vec{n} \cdot \vec{a}_1}_{0} = \vec{n} \cdot \vec{b}$$

↳ Das Kreuzprodukt kann selbst bei völlig windschiefen Geraden benutzt werden,

↳ (~~verlaufen in Ebenen, die nicht parallel sein müssen~~)

Können immer so gewählt werden ☺

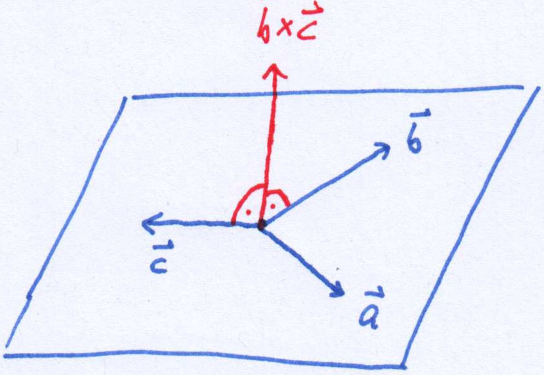
um den kürzesten Abstand zu finden, denn dieses ist in Lot-Richtung von beiden Geraden.

↪ Es gibt noch eine trilineare Abbildung

$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, nämlich „Spatprodukt"

$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

⇒ Klarerweise ist $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ genau dann, wenn die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ in einer gemeinsamen Ebene liegen.



↪ Vergleiche $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ b_3 c_1 - b_1 c_3 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{pmatrix}$

$$= a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1$$

mit der Determinante

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{matrix} a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 \\ - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2 \end{matrix}$$

d.h. wenn die drei Vektoren in einer Ebene liegen, und nicht den ganzen (3D) Raum „aufspannen", dann verschwindet die Determinante der Matrix aus den drei Spaltenvektoren.

↪ Formal spricht man von „linearer Abhängigkeit":
Drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ heißen linear abhängig, wenn es eine <u>nicht-triviale</u> Linearkombination $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} = 0$ gibt, d.h. mindestens ein $\lambda_i \neq 0$

↪ Allgemein für den $\mathbb{R}^n$ gilt das gleiche:
Stopfe n Vektoren in eine $n \times n$ Matrix und berechne die Determinante. Wenn diese Null ist, dann sind die n Vektoren linear abhängig, ansonsten linear unabhängig.

Entwicklung von Vektoren in einer Basis

↳ Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{2} v_i \vec{e}_i$

ist eine Linearkombination der Basisvektoren

$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

„Orthonormale Basis"

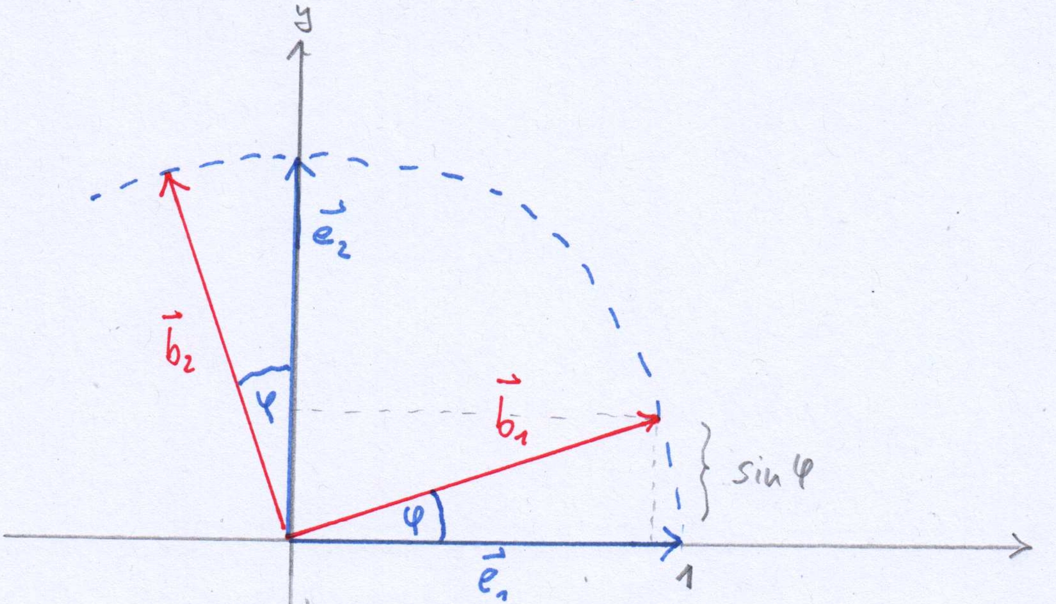
orthogonal = senkrecht

normal = normierte Länge

↳ Um eine lineare Abbildung zu definieren genügt es, die Wirkung auf die Basis zu spezifizieren:

$$A\vec{v} = A\left(v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2\right) = v_1 \underbrace{A\vec{e}_1}_{\vec{b}_1} + v_2 \underbrace{A\vec{e}_2}_{\vec{b}_2}$$

z.B. Drehung um den Winkel φ :



Drehe $\vec{e}_1$ auf $\vec{b}_1 = R\,\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \boxed{?} & ? \\ \boxed{?} & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\cos\varphi} \\ \boxed{\sin\varphi} \end{pmatrix}$

und $\vec{e}_2$ auf $\vec{b}_2 = R\,\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} ? & \boxed{?} \\ ? & \boxed{?} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \quad R(\varphi) = \left(\underset{\vec{b}_1}{\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}} \; \underset{\vec{b}_2}{\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}} \right) \qquad \text{„Drehmatrix"}$$

$$\Longrightarrow \quad \text{Drehe } \vec{v} \text{ auf } \vec{w} = v_1 \vec{b}_1 + v_2 \vec{b}_2$$
$$= v_1\, R(\varphi)\, \vec{e}_1 + v_2\, R(\varphi)\, \vec{e}_2$$
$$= R(\varphi)\left(v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 \right) = R(\varphi)\, \vec{v}.$$

↪ Wir können diese Operation rückgängig machen, indem wir wieder um $(-\varphi)$ drehen.

$$R(-\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$ gerade $\qquad = R(\varphi)^{-1} = R(\varphi)^T$

$\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$ ungerade.

$$\Longrightarrow \quad R^T R = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{c^2+s^2}^{1} & \overbrace{-cs+sc}^{0} \\ \underbrace{-sc+cs}_{0} & \underbrace{s^2+c^2}_{1} \end{pmatrix} = \underline{\mathbb{1}}$$

$$\Longrightarrow \quad R^T = R^{-1} \qquad \text{„orthogonale Matrix"}$$

Wunderbar chic : $R(\beta)\, R(\alpha) = R(\alpha+\beta)$

$$\begin{pmatrix} c_\beta & -s_\beta \\ s_\beta & c_\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\alpha & -s_\alpha \\ s_\alpha & c_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\alpha c_\beta - s_\alpha s_\beta & -(s_\alpha c_\beta + s_\beta c_\alpha) \\ s_\alpha c_\beta + s_\beta c_\alpha & c_\alpha c_\beta - s_\alpha s_\beta \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Additionstheoreme für sin, cos :

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

↪ Wenn A eine $n \times n$ Matrix mit $\det A \neq 0$ ist, finden wir die <u>inverse Matrix</u> A^{-1} mit dem Gaußalgorithmus $(A \mid \mathbb{1}) \longleftrightarrow (\mathbb{1} \mid A^{-1})$. Hier:

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} c & -s \\ s & c \end{matrix}}_{R} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{\mathbb{1}} \right) z_2 - \frac{s}{c} z_1 \Leftrightarrow \left(\begin{matrix} c & -s \\ 0 & \underbrace{c + \frac{s^2}{c}}_{\frac{c^2+s^2}{c} = \frac{1}{c}} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 \\ -\frac{s}{c} & 1 \end{matrix} \right) z_1 + sc\, z_2$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{matrix} c & 0 \\ 0 & \frac{1}{c} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \overbrace{1-s^2}^{c^2} & sc \\ -\frac{s}{c} & 1 \end{matrix} \right) \begin{matrix} |:c \\ |\cdot c \end{matrix} \Leftrightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \underbrace{\begin{matrix} c & s \\ -s & c \end{matrix}}_{R^{-1}} \right)$$

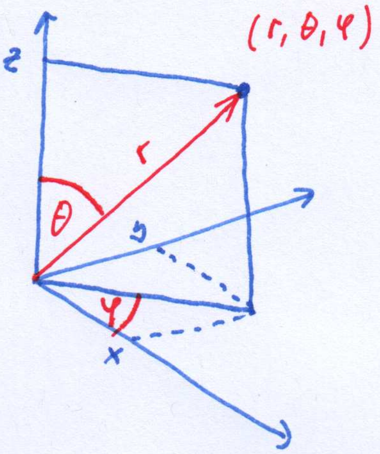
Für inverse Matrix gilt:

$$A^{-1} A = A A^{-1} = \mathbb{1} , \quad (A^{-1})^{-1} = A$$

Andere Koordinatensysteme

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ „Kartesisches Koordinatensystem"

↳ Anstelle der kartesischen Koordinaten x, y, z läßt sich ein Punkt im $\mathbb{R}^3$ auch durch 3 andere Größen beschreiben :



z.B. durch

r: Abstand zum Ursprung

θ: Winkel zur z-Achse
„Polarwinkel"

φ: Winkel der Tür
zur x-Achse
„Azimuthalwinkel"

Dies sind die $\boxed{\text{„Kugelkoordinaten"}}$ (sphärische Koord)

mit Wertbereich

$$r \in \mathbb{R}_+$$

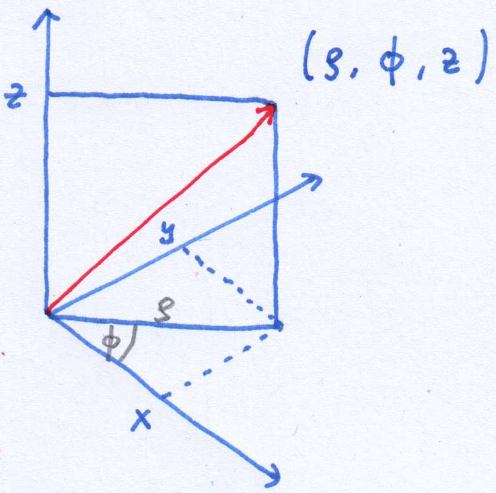
$$\theta \in [0, \pi]$$

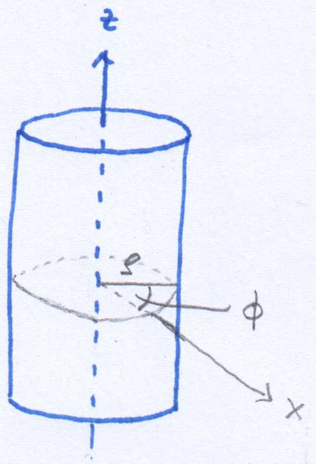
$$\varphi \in [0, 2\pi)$$

Der Zusammenhang mit x, y, z ist :

$$\left.\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta &= \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}\right.$$

↪ Ein anderes Standardbeispiel sind die $\boxed{\text{Zylinderkoordinaten}}$





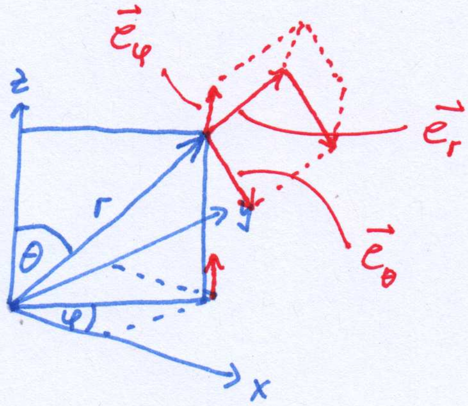
$$\varrho \in \mathbb{R}_+$$
$$\phi \in [0, 2\pi]$$
$$z \in \mathbb{R}$$

mit Zusammenhang

$$\left.\begin{aligned} x &= \varrho \cos \phi \\ y &= \varrho \sin \phi \\ z &= z \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} \varrho &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi &= \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ z &= z \end{aligned}\right.$$

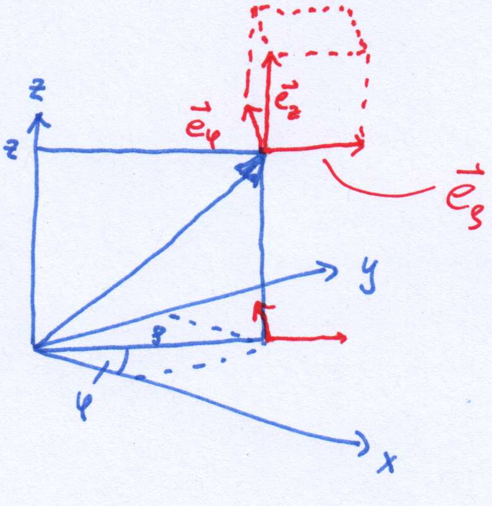
Reizvoll ist, daß auch diese Koordinatensysteme eine rechtwinklige Basis besitzen,

sphärische Koord:



je nach Position zeigen sie in verschiedene Richtungen.

Zylinder Koord:



auch hier Positions-abhängig.