

Formale Logik

Aussagen: In der formalen Logik kann eine Aussage nur den Wert „wahr“ (w) oder „falsch“ (f) annehmen.

Def.: Seien A und B Aussagen, dann ist

$\hookrightarrow \neg A$ „nicht A“ (Negation) $A = \neg(\neg A)$

$\hookrightarrow A \wedge B$ „A und B“ (Konjunktion)

$\hookrightarrow A \vee B$ „A oder B“ (Disjunktion)

$\hookrightarrow A \Rightarrow B$ „Wenn A, dann B“ (Implikation)

$\hookrightarrow A \Leftrightarrow B$ „B genau dann, wenn A“ (Äquivalenz)

$$(A \Leftrightarrow B) = ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$$

Wahrheitstafel

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \vee B$
w	w	f	f	w	w
w	f	f	w	f	w
f	w	w	f	f	w
f	f	w	w	f	f

Implikation ($A \Rightarrow B$)

↳ Dies ist selbst eine Aussage, die wahr oder falsch sein kann.

↳ Die Bedeutung von $((A \Rightarrow B) = w)$ ist, daß nicht gleichzeitig A wahr und B falsch sein kann, d.h.

Aside:

$$\neg A = (A = f)$$

$$(A \Rightarrow B) = (A \wedge \neg B = \text{falsch})$$

A	B	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$(A \wedge \neg B) = f$	$A \Rightarrow B$
w	w	f	f	w	w
w	f	w	w	f	f
f	w	f	f	w	w
f	f	w	f	w	w

Satz: Seien A, B, C Aussagen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \hookrightarrow (A \Rightarrow B) &= (A \wedge \neg B = f) = (\neg B \wedge A = f) \\ &= (\neg B \wedge \neg(\neg A) = f) = (\neg B \Rightarrow \neg A) \end{aligned}$$

z.B. A: x ist durch 4 teilbar
B: x ist durch 2 teilbar. (Kontraposition)

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \neg(A \wedge B) &\Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B) \\ \neg(A \vee B) &\Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B) \end{aligned} \quad (\text{De Morgan Regel})$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow A \wedge (B \vee C) &\Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\ A \vee (B \wedge C) &\Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C) \end{aligned} \quad (\text{Distributivität})$$

Beweis mit Wahrheitstafeln.

Mengenlehre

Def: $\hookrightarrow$ Eine Menge ist die Zusammenfassung von Elementen zu einem Ganzen.

$\hookrightarrow$ Ist ein Objekt x Element der Menge M ,
schreibe $x \in M$, wenn nicht $x \notin M$.

$\hookrightarrow$ Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn
sie die selben Elemente haben.

$\hookrightarrow$ aufzählende Notation: Elemente durch Komma
getrennt zwischen geschweiften Klammern $\{a, b, c\}$

$\hookrightarrow$ Mengenbildungsoperation: Menge aller Objekte x ,
für die eine Aussage $A(x)$ wahr ist $\{x \mid A(x)\}$

$\hookrightarrow$ Die Menge $\{x \mid x \neq x\} = \{x \mid \text{falsch}\} = \{\} = \emptyset$
heißt leere Menge

Beispiele:

$\hookrightarrow E = \{a, \{b, c\}\}$ enthält genau zwei Elemente,
nämlich a und $\{b, c\}$. D.h. $b \notin E$, $c \notin E$,
 $E \neq \{a, b, c\}$

$\hookrightarrow$ Für $F = \emptyset$ und jedes Objekt x gilt $x \notin F$,
insbesondere ist $x = \emptyset$ nicht Element von F .

$\hookrightarrow G = \{\emptyset\}$ enthält genau ein Element, nämlich
 $\emptyset \in G$. Somit ist $G \neq \emptyset$ nicht leer.

Def: Seien A und B Mengen. Dann sind

↳ Durchschnitt $A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$

↳ Vereinigung $A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$

↳ Differenz $A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$
↳ „ohne“

⇒ Wenn $A \cap B = \emptyset$, dann sind A und B „disjunkt“

Bsp: $\{a, b, c\} \cap \{c, d\} = \{c\}$

$$\{a, b, c\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$$

$$\{a, b, c\} \setminus \{c, d\} = \{a, b\}$$

$\{a, b, c\}$ und $\{d, e\}$ sind disjunkt

$\{a, b, c\}$ und $\{c, d\}$ sind nicht disjunkt.

Satz: (Beweise wie bei den Wahrheitstafeln)

Seien A, B, C Mengen. Dann gilt:

↳ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

↳ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

↳ $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

↳ $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Def. von "Quantoren" : $\forall$: Allquantor "für alle"
 $\exists$: Existenzquantor "es existiert"

Satz : $\neg (\forall x \in M : A(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in M : \neg A(x))$
 $\neg (\exists x \in M : A(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in M : \neg A(x))$

z.B. Sei M = Menge aller Vorkursteilnehmer.

Aussage "Alle Vorkursteilnehmer haben Quantoren verstanden"

$\forall x \in M : x$ versteht Quantoren.

Vernichtung $\rightarrow$ "Es gibt (mindestens) einen Vorkursteilnehmer,
der Quantoren nicht verstanden hat."

$\exists x \in M : x$ versteht Quantoren nicht.

Unter- (Teil-) bzw. Obermengen

Seien A und B Mengen. Wenn jedes Element von A
auch in B ist, $\forall x \in A : x \in B$

dann ist $B \supseteq A$ Obermenge von A bzw.
 $A \subseteq B$ Teilmenge (Untermenge) von B .

$\hookrightarrow \emptyset \subseteq A, A \subseteq A$

$\hookrightarrow$ Wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

$\hookrightarrow A = B$ äquivalent zu $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$

Kartesisches Produkt

Für $a \in A$ und $b \in B$ heißt (a, b) das

(geordnete) Paar. Zwei Paare

(a, b) und (a', b') sind genau dann

gleich, wenn $a = a'$ und $b = b'$.

$$\{a, b, c\} = \{b, c, a\}$$

aber

$$(a, b) \neq (b, a)$$

↳ Das Kartesische Produkt

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

$$\text{z.B. } \{a, b\} \times \{1, 2, 3\} = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), \\ (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

Dies kennen wir schon von Abbildungen, z.B.

$$\text{das Skalarprodukt : } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Kreuzprodukt : } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

Beweismethoden

"Sätze" haben in der Mathematik 3 Bestandteile:

- Voraussetzung
 - Behauptung
 - Beweis
- es gibt mehrere Methoden,
einen Beweis zu führen.
Hier werden 3 vorgestellt.

1) Direkter Beweis: Man nehme eine wahre Aussage (Prämisse) und leitet durch Implikationen die Behauptung (Konklusion) ab.

z.B. Sei $n \in \mathbb{N}$ eine ungerade Zahl (Voraus.)

Dann ist n^2 ebenfalls ungerade (Beh.)

Beweis: $n = 2k + 1$ (Prämisse)

$$\Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot \underbrace{(2k^2 + 2k)}_{\text{gerade}} + 1$$

$\Rightarrow n^2$ ist ungerade (Konklusion)

Genauso, und noch einfacher: Das Quadrat einer geraden Zahl ist gerade.

$A(n) \Rightarrow \dots \Rightarrow B(n)$
(Prämisse) (Konklusion)

2)

Indirekter Beweis: $A \Rightarrow B$ gezeigt durch

$$(A \wedge \neg B) = \text{f}$$

„Nehme das Gegenteil der Behauptung an, und führe dies zum Widerspruch“

Bsp: B : $\sqrt{2}$ ist irrational

$$A: \sqrt{2}^2 = 2$$

$\neg B$: $\sqrt{2}$ ist rational, läßt sich also als

$$\frac{p}{q} \text{ mit } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \text{ voll gekürzt.}$$

Beweis: Aus A folgt $\frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$

$\Rightarrow p^2$ ist eine gerade Zahl

$\Rightarrow p$ ist eine gerade Zahl.

$$\Rightarrow p = 2n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = \frac{4n^2}{q^2} = 2 \Rightarrow q^2 = 2n^2$$

$\Rightarrow q^2$ ist eine gerade Zahl

$\Rightarrow q$ ist eine gerade Zahl.

Es folgt, daß $\frac{p}{q}$ nicht voll gekürzt ist.

Widerspruch $\downarrow \Rightarrow$ Annahme $\neg B = \text{f}$

$\Rightarrow B = \text{wahr}$

3) Vollständige Induktion

Eine Aussage, die zu beweisen ist, hänge von einer natürlichen Zahl $N \in \mathbb{N}$ ab.

Der Beweis folgt durch zwei Bestandteile

↳ Beweis (z.B. direkt) für ein bestimmtes N ,
z.B. $N=1$. $\Rightarrow A_1 = \text{wahr}$ „Induktionsanfang“

↳ Nehme an, A_N sei wahr. Zeige dann, daß auch die Aussage A_{N+1} wahr sein muß.

$A_N \Rightarrow A_{N+1}$ „Induktionsschritt“ oder „Ind. schluß“

$$A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow A_3 \longrightarrow A_4 \longrightarrow \dots$$

Bsp: Für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^N k = \frac{N(N+1)}{2}$

(Erinnerung: $1 + 2 + \dots + N$

$$\begin{array}{r} N + (N-1) + \dots + 1 \\ \hline (N+1) + (N+1) + \dots + (N+1) \end{array}$$

)

Induktionsanfang: $N=1$: $\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} \checkmark$

Induktionsschritt : Nimm an, $\sum_{k=1}^N k = \frac{N(N+1)}{2}$ ist.

Zeige, daß $\sum_{k=1}^{N+1} k = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N+1} k &= \left(\sum_{k=1}^N k \right) + (N+1) = \frac{N(N+1)}{2} + (N+1) \\ &= \frac{N(N+1) + 2(N+1)}{2} = \frac{(N+1)(N+2)}{2}\end{aligned}$$

Mit dieser Methode beweisen Sie z.B.

$$(a+b)^N = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} a^{N-k} b^k \quad (1, 2 \text{ binomische Formel})$$

$$(a-b)^N = \sum_{k=0}^N a^{N-k} b^k = a^{N+1} - b^{N+1} \quad (3. \text{ binomische Formel})$$

Weiteres Beispiel : Bernoullische Ungleichung

Sei $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Beweis : (I.A.) für $n=0$ ist $(1+x)^0 = 1 = 1+0 \cdot x$ ✓

(I.S.) Nimm an, $(1+x)^n \geq 1+nx$. Dann ist

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x) \geq (1+x)(1+nx)$$

$$= 1+x+nx+\underbrace{nx^2}_{\geq 0}$$

$$\geq 1+(n+1)x \quad \checkmark$$

Komplexe Zahlen

Motivation: $x^2 + px + q = 0$ hat Lösungen

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Was ist, wenn $q > \frac{p^2}{4}$?

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{(-1) \left(q - \frac{p^2}{4} \right)} = \sqrt{(-1)} \underbrace{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}_{\text{reell}}$$

Wir definieren imaginäre Einheit i als eine Lösung

der Gleichung $z^2 + 1 = 0$, d.h. $z = 0 \pm \sqrt{0^2 - 1} = \pm \sqrt{-1} = \pm i$

↳ Eine komplexe Zahl $z = x + iy$ ist eine Linearkombination der Einheiten 1 (reell) und i (imaginär).

mit

$$x = \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}, \quad y = \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$$

z.B. Sei $z = 3 - 2i$, dann ist

Realteil von z : $\operatorname{Re}(z) = 3$

Imaginärteil von z : $\operatorname{Im}(z) = -2$

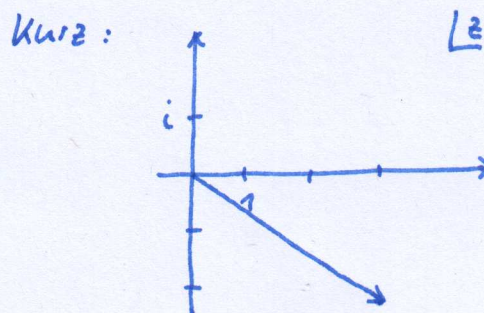
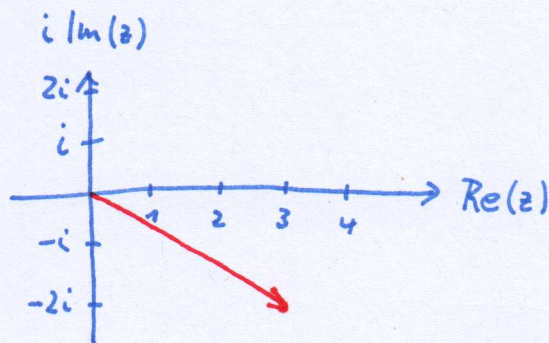
↳ Die Menge der komplexen Zahlen bezeichnet man als

$$\mathbb{C} = \{ x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

Kommentar : Da $i^2 = -1$ folgt $\boxed{i(-i) = 1}$

und $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$, $i^7 = -i$, etc.

↳ Komplexe Zahlenebene $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$. Sei $z = 3 - 2i$



↳ Ansonsten sind die Grundrechenarten

Addition
(Subtraktion)

$$(-1 + 3i) + (4 + i) = 3 + 4i$$

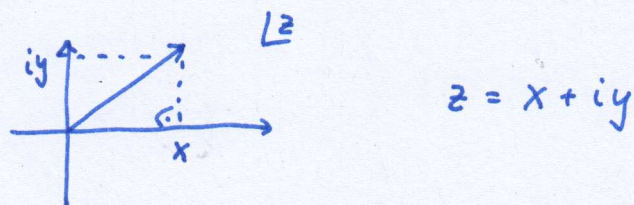
Multiplikation

$$\begin{aligned} (-1 + 3i) \cdot (4 + i) &= \underbrace{-4 - i} + 12i + 3\underbrace{i^2}_{-1} \\ &= -7 + 11i \end{aligned}$$

unproblematisch, wenn auch gewöhnungsbedürftig.

↳ Für die Division wollen wir zuerst das
„komplex Konjugieren“ einführen.

↳ „Isomorphismus“ (Entsprechung) von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$



Betrag von $|z|$ wie $|\vec{v}|$ mit $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{oder} \quad |z|^2 = (\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2$$

$\in \mathbb{R}$

ACHTUNG: Während es eine „Ordnung“ der reellen Zahlen gibt, z.B. $2 < 3$, gibt es dies nicht in den komplexen Zahlen.

⚡

$$\underbrace{2 - 10i}_z < \underbrace{3 + \frac{1}{6}i}_w \quad \text{macht keinen Sinn}$$

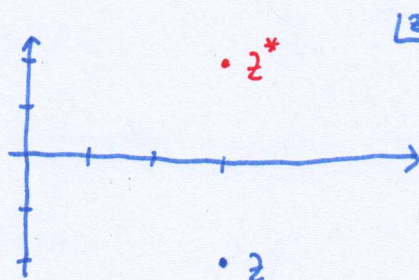
wohl aber $|z| > |w|$

↑ reelle Zahlen

↳ Die Operation „komplex konjugieren“ ändert das Vorzeichen des Imaginärteils.

$$z = x + iy \Rightarrow z^* = x - iy$$

z.B. sei $z = 3 - 2i \Rightarrow z^* = 3 + 2i$



Spiegelung an der reellen Achse.

↳ Damit geht schnell (3. binom. Formel)

$$z \cdot z^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$

↳ Außerdem hilft es bei der Division: Was ist $\frac{w}{z}$?

Wir wissen, wie man durch eine reelle Zahl teilt,
also erweitern den Bruch mit z^* :

$$\frac{w}{z} = \frac{w z^*}{z z^*} = \frac{1}{|z|^2} w z^*$$

↖ reell.

z.B.:

$$\begin{aligned} \frac{3-2i}{1+5i} &= \frac{(3-2i)(1-5i)}{(1+5i)(1-5i)} = \frac{1}{26} (3-2i)(1-5i) \\ &= \frac{1}{26} (3 - 15i - 2i - 10) = \frac{1}{26} (-7 - 17i) \\ &= -\frac{7}{26} - \frac{17}{26} i. \end{aligned}$$

↳ Polardarstellung von komplexen Zahlen

Ähnlich der Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$ wird

eine komplexe Zahl $z = x + iy$ durch

$|z|$, $\varphi = \arg(z)$ „Argument“ = Winkel zur
reellen Achse.

↳ Viele Funktionen lassen sich (in einem Geltungsbereich) als Potenzreihen darstellen (→ Taylor-Reihe)

z.B.
$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots$$

Versuch mit $x \rightarrow i\alpha$, mit $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, etc.

$$\Rightarrow \exp(i\alpha) = 1 + i\alpha + \frac{1}{2}(i\alpha)^2 + \frac{1}{3!}(i\alpha)^3 + \frac{1}{4!}(i\alpha)^4 + \frac{1}{5!}(i\alpha)^5 + \dots$$

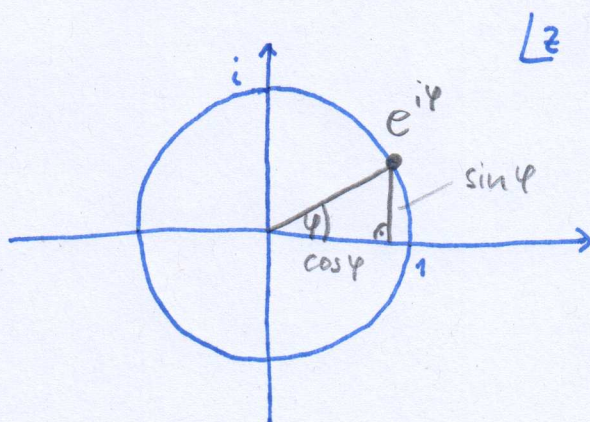
$$= 1 + i\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{3!}(-i)\alpha^3 + \frac{1}{4!}\alpha^4 + \frac{1}{5!}i\alpha^5 + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{4!}\alpha^4 - \frac{1}{6!}\alpha^6 + \dots \right) + i \left(\alpha - \frac{1}{3!}\alpha^3 + \frac{1}{5!}\alpha^5 - \dots \right)$$

Potenzreihe von $\cos \alpha$

Potenzreihe von $\sin \alpha$

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$



Es liefert schöne Gleichungen für T-Shirts, z.B.

$$e^{i\pi} = -1$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

$$|e^{i\varphi}| = |\cos \varphi + i \sin \varphi| = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

unabhängig von φ auf dem Einheitskreis.

$$\begin{aligned} (e^{i\varphi})^* &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)^* = \cos \varphi - i \sin \varphi \\ &= \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = e^{-i\varphi} \end{aligned}$$

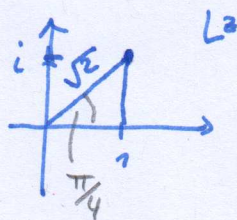
↳ Die Polardarstellung einer beliebigen komplexen Zahl

$$z = r e^{i\varphi}, \quad r = |z|, \quad \varphi = \arg(z)$$

$$\Rightarrow \text{Multiplikation: } z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$$

$$\Rightarrow z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \text{z.B. } z &= 1 + i \\ &= \sqrt{2} e^{i\pi/4} \end{aligned}$$



$\Rightarrow$ Potenzen und Wurzeln in Polardarstellung „einfach“

$$\hookrightarrow \text{Auch nützlich: } e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$$

$$\text{Summe: } e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2 \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}}$$

$$\text{Differenz: } e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}}$$

↳ Zunächst Potenzen von $z = r e^{i\varphi}$ $|(\dots)^n$

$$\Rightarrow z^n = r^n (e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}$$

$$\begin{aligned} \text{z.B. } (1+i)^8 &= (\sqrt{2} e^{i\pi/4})^8 = (2^{\frac{1}{2}} e^{i\pi/4})^8 \\ &= \underbrace{2^4}_{16} \underbrace{e^{i2\pi}}_1 = 16 \end{aligned}$$

$$\boxed{e^{2\pi i} = 1}$$

Beobachtung: Die Gleichung $z^8 = 16$ wird nicht nur von $z = \pm\sqrt{2}$, sondern auch u.a. von $z = \pm(1+i)$ gelöst. Tatsächlich gibt es 8 verschiedene Lösungen in $\mathbb{C}$.

↳ Wurzel ziehen: Hier ist der Trick $z = z \cdot 1 = z \cdot 1^k$
hilfreich: $z = r e^{i\varphi} \cdot (e^{i2\pi})^k = r e^{i(\varphi + 2\pi k)}, k \in \mathbb{Z}$.

Denn dann finden wir:

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}} = \sqrt[n]{r} e^{i\beta_k}$$

mit $\beta_k = \frac{\varphi}{n} + 2\pi \frac{k}{n}$. Wenn wir z.B. $k=0..n-1$

wählen, sind dies n verschiedene Winkel. Für $k=n$

ist

$$\beta_n = \frac{\varphi}{n} + 2\pi \frac{n}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi \Rightarrow e^{i\beta_n} = e^{i\beta_0}$$

Bsp: Finde alle Lösungen von $z^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^4 = -1$
($z = \sqrt[4]{-1}$)

$$-1 = e^{i\pi} = e^{i(\pi + 2\pi k)} \quad | \quad ()^{\frac{1}{4}}$$
$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi \frac{k}{4}\right)}$$

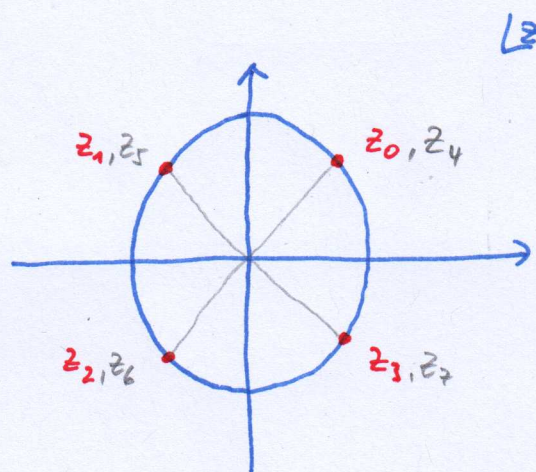
$$k=0: z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

$$k=1: z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$$

$$k=2: z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)$$

$$k=3: z_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$$

$$k=4: z_4 = e^{i\frac{9\pi}{4}} = z_0$$



Grundlage : Axiome

Wir besprechen nochmal die Erweiterungen

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \dots$$

Def: Nachfolger, natürlichen Zahlen, Einselement mit folgenden Eigenschaften:

- (N1) Das Einselement ist eine natürliche Zahl.
- (N2) Zu jeder natürlichen Zahl ist der Nachfolger ebenfalls eine natürliche Zahl.
- (N3) Das Einselement tritt nicht als Nachfolger einer natürlichen Zahl auf.
- (N4) Zwei natürliche Zahlen, die denselben Nachfolger haben, sind gleich.
- (N5) Enthält eine Menge natürlicher Zahlen das Einselement und zu jedem Element auch ihren Nachfolger, so beinhaltet die Menge alle natürlichen Zahlen.

Def:

- * Die Menge der natürlichen Zahlen wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet.
- * Das Einselement wird mit 1 bezeichnet.
- * Der Nachfolger von 1 wird mit 2 bezeichnet,
—— " —— 2 —— " —— 3 —— " ,
etc.

Def: Sei M eine Menge, die $\mathbb{N}$ enthält, $\mathbb{N} \subseteq M$.

Je zwei Elementen aus M , $x, y \in M$, sei

eine Summe $x+y \in M$, und ein Produkt

$x \cdot y \in M$ zugeordnet, so daß für alle $x, y, z \in M$ gilt:

- " Ring "
- (R1) Im Fall $x \in \mathbb{N}$ ist $x+1$ der Nachfolger von x .
 - (R2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (Assoziativität der Addition)
 - (R3) $x \cdot 1 = x$ (Neutralität der Eins)
 - (R4) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (Distributivität)

" auf M sind Addition und Multiplikation definiert ".

Satz: Auf $\mathbb{N}$ sind Addition und Multiplikation eindeutig.

Bsp: $\hookrightarrow 3 + 1 = 4$

$$\hookrightarrow 3 + 2 = 3 + (1 + 1) = (3 + 1) + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$\hookrightarrow 3 + 3 = 3 + (2 + 1) = (3 + 2) + 1 = 5 + 1 = 6$$

und $3 \cdot 2 = 3 \cdot (1 + 1) = (3 \cdot 1) + (3 \cdot 1) = 3 + 3 = 6$

Def:

Man definiert die Menge $\mathbb{Q}$ (und die Menge $\mathbb{Z}$),
ein Neutralelement $0 \in \mathbb{Q}$, sowie zu jedem $x \in \mathbb{Q}$
die Gegenzahl $-x$ und für $x \neq 0$ den
Kehrwert $x^{-1} \in \mathbb{Q}$, so daß

Körperaxiome

- (K1) $x + (y + z) = (x + y) + z$ für alle $x, y, z \in \mathbb{Q}$
- (K2) $x + 0 = x$ $\forall x \in \mathbb{Q}$
- (K3) $x + (-x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{Q}$
- (K4) $x + y = y + x$ $\forall x, y \in \mathbb{Q}$
- (K5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}$
- (K6) $x \cdot 1 = x$ $\forall x \in \mathbb{Q}$
- (K7) $x \cdot x^{-1} = 1$ $\forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$
- (K8) $x \cdot y = y \cdot x$ $\forall x, y \in \mathbb{Q}$
- (K9) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}$

$$(Z) \quad \mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-x \mid x \in \mathbb{N}\}$$

$$(Q) \quad \mathbb{Q} = \{x \cdot y^{-1} \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{N}\}$$

↳ Die Elemente von $\mathbb{Z}$ heißen „ganze Zahlen“

↳ ———— „rationale Zahlen“

$$\hookrightarrow \text{Def. } \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Sind $x, y \in \mathbb{Q}$, schreibe $\left| \begin{array}{l} x - y \text{ für } x + (-y) \\ \frac{x}{y} \text{ für } x \cdot y^{-1} \end{array} \right.$

Satz: Seien $x, y \in \mathbb{Q}$ mit $x+y=y$. Dann muß $x=0$ gelten.

Beweis (Nur mit Körperaxiomen):

$$\begin{aligned} x &= x+0 \stackrel{(K2)}{=} x+(y+(-y)) \stackrel{(K1)}{=} (x+y)+(-y) \end{aligned}$$

laut Voraussetzung $x+y=y$ gilt:

$$x = y+(-y) \stackrel{(K3)}{=} 0$$

Satz: Seien $x, y \in \mathbb{Q}$. Dann ist

$x \cdot y = 0$ äquivalent zu $(x=0 \text{ oder } y=0)$

Beweis 1) „ $\Leftarrow$ “ (direkter Beweis)

$$\text{Sei } x=0 \Rightarrow x \cdot y = 0 \cdot y \stackrel{(K2)}{=} (0+0) \cdot y \stackrel{(K1)}{=} (0 \cdot y) + (0 \cdot y)$$

$$\Rightarrow 0 \cdot y = 0 \cdot y + 0 \cdot y \quad (\text{Satz oben})$$

$$\Rightarrow 0 \cdot y = 0 \Rightarrow x \cdot y = 0$$

$$\text{Sei } y=0 \Rightarrow x \cdot y = y \cdot x \stackrel{(K8)}{=} 0 \cdot x = 0 \quad (\text{s.o.})$$

2) „ $\Rightarrow$ “ (indirekter Beweis)

Sei $x \neq 0$ und $y \neq 0$.

Nimm an, $x \cdot y = 0$. Weil $y \neq 0$ existiert y^{-1} , und

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot y^{-1} \stackrel{(\text{s.o.})}{=} (x \cdot y) \cdot y^{-1} \stackrel{(\text{Ann.})}{=} x \cdot (y \cdot y^{-1}) \stackrel{(K5)}{=} x \cdot 1 \stackrel{(K6)}{=} x \neq 0 \end{aligned}$$

Widerspruch ☺

Diese letzten beiden Sätze gelten nicht nur für $\mathbb{Q}$, sondern immer, wenn die Körperaxiome auf einer Menge M erfüllt sind.

Def: Seien $m, n \in \mathbb{Z}$. Man nennt $d \in \mathbb{Z}$ einen Teiler von n , wenn ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $n = k \cdot d$ existiert. Gibt es kein $d \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$, das sowohl Teiler von m als auch Teiler von n ist, heißen m und n teilerfremd.

Satz: Sei $x \in \mathbb{Q}$. Dann gibt es eindeutig bestimmte teilerfremde Zahlen $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ mit $x = \frac{m}{n}$ (voll gekürzt!).

Reelle Zahlen

Ein „vollständig angeordneter Körper“ ist eine Menge mit Addition, Multiplikation, Körperaxiome (K1-K9) und Kleiner-Relation $<$, so daß

(A1) Es gilt entweder $x < y$, $x = y$, oder $y < x$
(Eindeutigkeit)

(A2) Gilt $x < y$ und $y < z$, so ist $x < z$
(Transitivität)

(A3) Gilt $x < y$, so gilt auch $x + z < y + z$

(A4) Gilt $x < y$ und $0 < z$, so gilt $x \cdot z < y \cdot z$.

(V) Jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge
besitzt eine größte untere Schranke (Infimum)

Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge
besitzt eine kleinste obere Schranke (Supremum)

Satz: Es gibt eine reelle Zahl x mit $x^2 = 2$.

Beweisidee: Benutzt wird die Vollständigkeit (V) für

Mengen $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ oder } x^2 \leq 2\}$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ und } x^2 > 2\}$$

Dann gilt $a < b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$

Es gibt ein Infimum von B (Supremum von A).

Das ist die gesuchte Zahl.