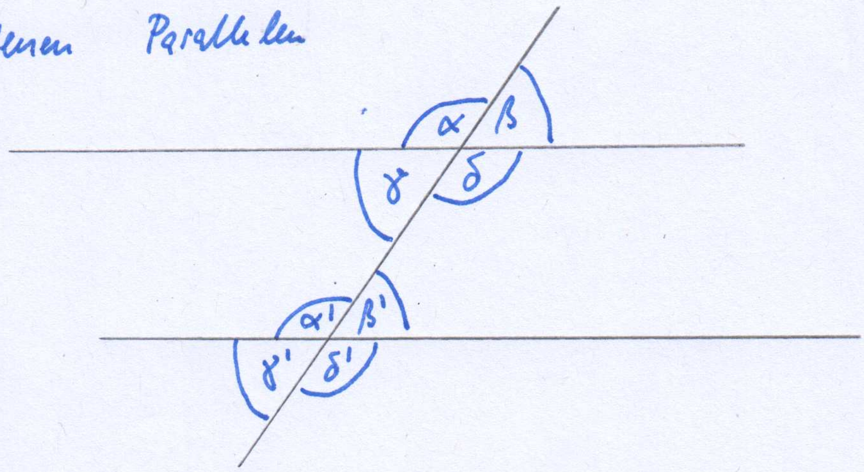
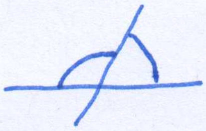
Modul E: Geometrie in der Ebene

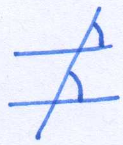
Ein paar Namen und Identitäten von Winkeln an geschnittenen Parallelen

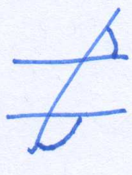


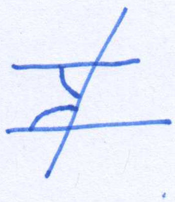
a) Nebenwinkel  z.B. (α,β), (α,γ), (δ',γ'), …

$\Longrightarrow$ Summe $= \pi$

b) Scheitelwinkel  z.B. $(\beta=\gamma)$, $(\alpha'=\delta')$, …

c) Gleichliegende  z.B. $(\alpha=\alpha')$, $(\beta=\beta')$, …

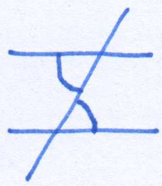
d) Entgegengesetzte  (äußerer) z.B. (β,δ'), (α,γ'), …

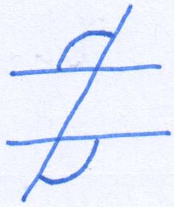
 (innerer) z.B. (γ,α'), (β',δ), …

(wie bei Nebenwinkel) Summe $= \pi$

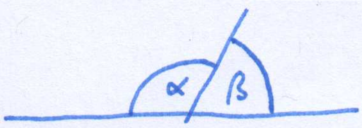
Wir benutzen Radians:

$$360^\circ \mathrel{\hat{=}} 2\pi$$
$$180^\circ \mathrel{\hat{=}} \pi$$
$$90^\circ \mathrel{\hat{=}} \pi/2$$
$$45^\circ \mathrel{\hat{=}} \pi/4$$

e) Wechselwinkel  (innerer) z.B. (γ, β'), (δ, α') sind gleich: $\gamma = \beta'$, $\delta = \alpha'$

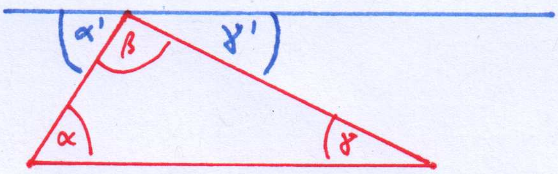
 (äußerer) z.B. $(\alpha = \delta')$, $(\beta = \gamma')$

All dies basiert auf a) und c), insbesondere



$\alpha + \beta = \pi$ (180°)

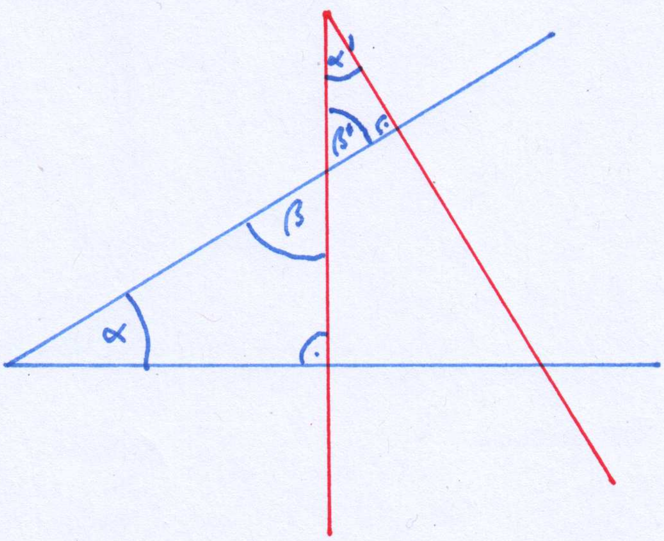
Es folgt sofort, daß die Summe der inneren Winkel eines Dreiecks



Wechselwinkel $\alpha' = \alpha$, $\gamma' = \gamma$

$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta + \gamma' = \pi$.

↪ Für andere (etwas kompliziertere) Konstruktion müssen wir kurz nachdenken:

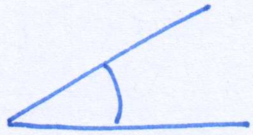


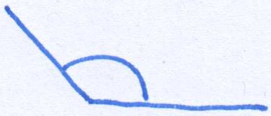
$\beta = \beta'$ (Scheitelwinkel)

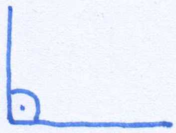
$\alpha + \beta + \frac{\pi}{2} = \pi$

$\alpha' + \beta' + \frac{\pi}{2} = \pi$

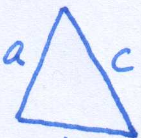
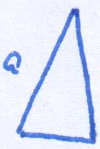
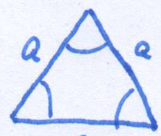
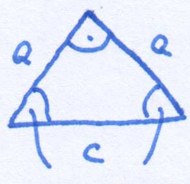
$\Rightarrow \boxed{\alpha = \alpha'}$

↳  „spitzer Winkel" $< \frac{\pi}{2}$

 „stumpfer Winkel" $> \frac{\pi}{2}$

 „rechter Winkel" $= \frac{\pi}{2}$

↳ Genauso Dreiecke

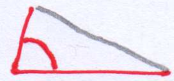
	ungleichseitig	gleichschenklig	gleichseitig
stumpf-			
spitz-			 Winkel $\pi/3$
recht-winklig		 Winkel $\pi/4$	

↪ Was brauchen wir, um ein Dreieck „eindeutig" zu konstruieren?

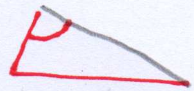
Kongruenz: deckungsgleich mit erlaubter Spiegelung.

(1) Dreiecke sind kongruent, wenn sie in 3 Seiten übereinstimmen (SSS)

(2) ——— " ———, wenn sie durch zwei Seiten und den von diesen eingeschlossenen Winkel übereinstimmen (SWS)



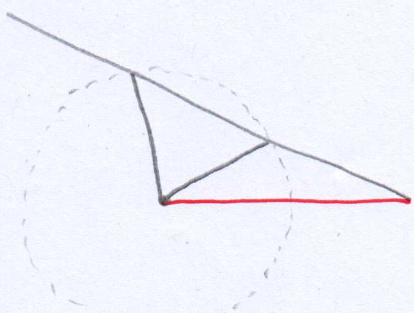
(3) ——— " ———, wenn sie durch zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen (SSW)



(4) ——— " ———, wenn sie in einer Seite und zwei Winkeln übereinstimmen (WSW) oder (SWW) oder (WWS)

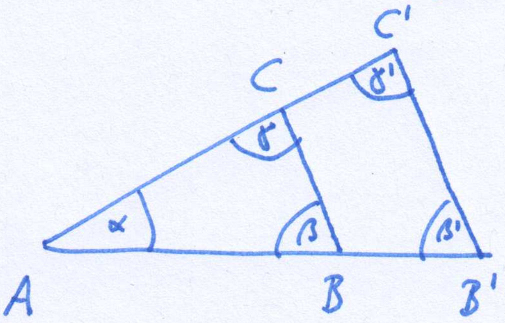
Bemerkung:

zu (3): Wäre der andere Winkel gegeben, so gäbe es zwei verschiedene Lösungen:



zu (4): Wenn ich zwei Winkel kenne, dann kenne ich auch den dritten, da $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \pi$

↪ Wenn zwei Dreiecke drei (zwei) gleiche Winkel haben, sind sie einander „ähnlich"



$\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$

gleichliegende Winkel.

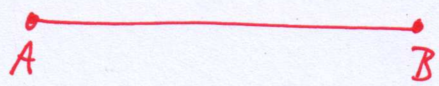
↪ Ähnliche Dreiecke haben die gleichen Seiten-Verhältnisse:

z.B. $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}}$, $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = \dfrac{\overline{B'C'}}{\overline{B'A}}$, etc.

Anwendung (1):

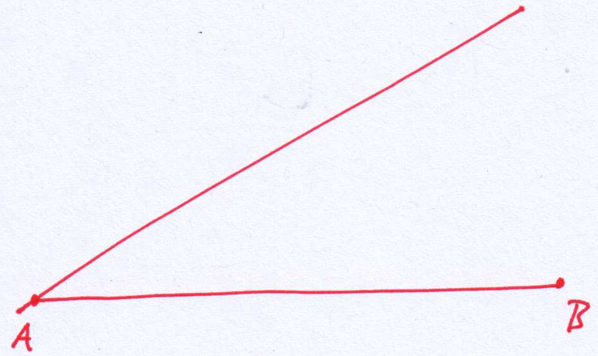
Die Ähnlichkeit kann benutzt werden, um eine Strecke in n gleiche Teile zu teilen:

z.B. Strecke $\overline{AB}$

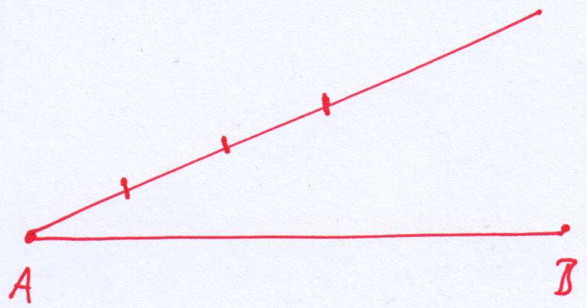


in 3 gleiche Teile:

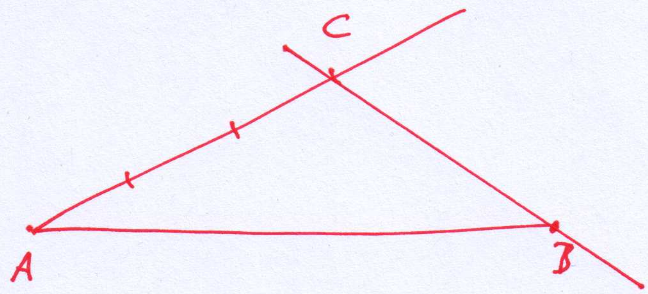
1) Zeichne eine beliebige Gerade durch den Punkt A.



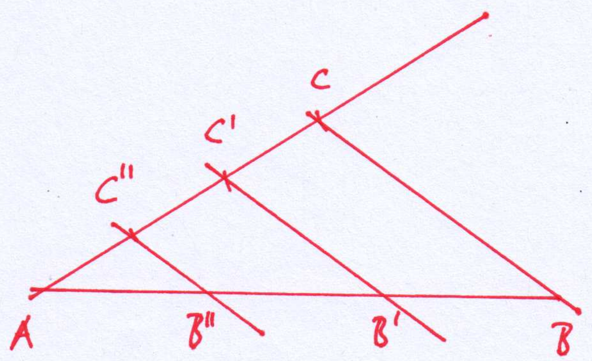
2) Markiere 3 äquidistante Punkte auf neuer Geraden:



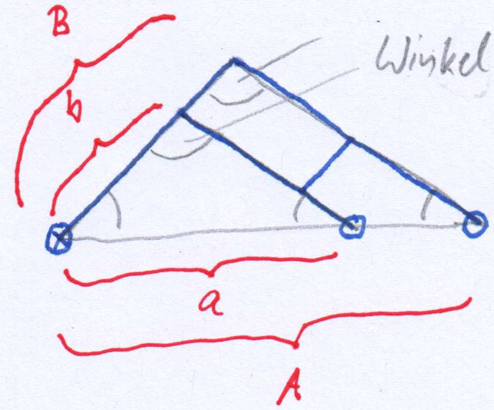
3) Verbinde den letzten Punkt mit B



4) Zeichne Parallelen von BC durch die anderen Punkte



Anwendung (2): Der <u>Pantograph</u> zum Vergrößern und Verkleinern:



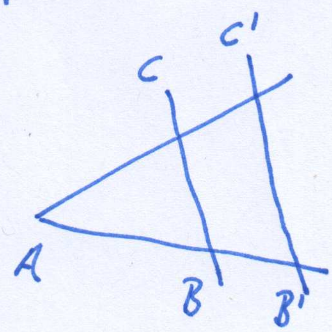
Winkel immer gleich!

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \quad A = \underbrace{\frac{B}{b}}_{\text{konstanter Vergrößerungsfaktor.}} a$$

Anwendung (3): Der <u>Strahlensatz</u>:

Entsprechende Teilabschnitte sind verhältnisgleich



(wenn $CB \parallel C'B'$) gilt:

$$\frac{\overline{CC'}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB'}} \qquad \text{(Aussage)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{AB}\;\overline{CC'} = \overline{AC}\;\overline{BB'}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{AB}\left(\overline{AC'} - \overline{AC}\right) = \overline{AC}\left(\overline{AB'} - \overline{AB}\right)$$

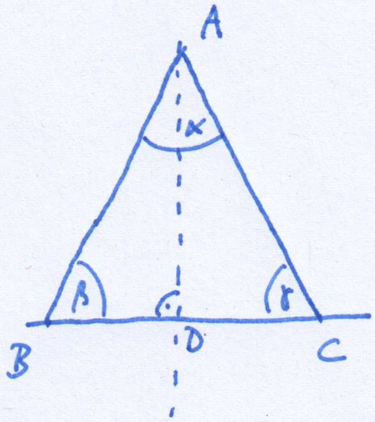
$$\Leftrightarrow \quad \overline{AB}\;\overline{AC'} - \overline{AB}\;\overline{AC} = \overline{AC}\;\overline{AB'} - \overline{AC}\;\overline{AB} \qquad \Big| + \overline{AC}\;\overline{AB}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} \quad \checkmark$$

(schon bekannt für ähnliche Dreiecke)

Spezielle Driecke

↳ Ein gleichschenkliges Dreieck ist axialsymmetrisch bzgl. der Höhenachse.



$\overline{AB} = \overline{AC}$

Höhe des Driecks ABC:

$h = \overline{AD}$

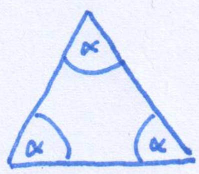
Fläche : $F = \overline{AD}\;\overline{DC} = \overline{AD}\;\overline{BD}$

$= h \cdot \frac{1}{2}\,\overline{BC}$

$= \frac{1}{2}$ Höhe · Basis.

Die Dreiecke ABD und ACD sind kongruent $\Rightarrow \beta = \gamma$

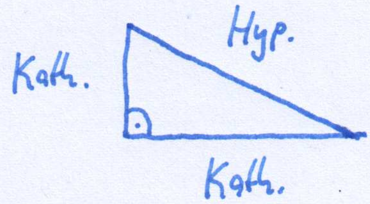
↳ Ein gleichseitiges Dreieck hat drei gleiche Winkel



mit $3\alpha = \pi$

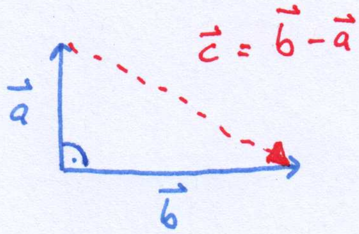
$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$ $(60°)$

↳ Ein rechtwinkliges Dreieck hat 2 Katheten und eine Hypothenuse.



Pythagoras ist einfach mit Vektorrechnung:

Sei $\vec{a}$ die erste Kathete und $\vec{b}$ die zweite.



Die Hypothenuse ist $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$

hat die Länge im Quadrat:

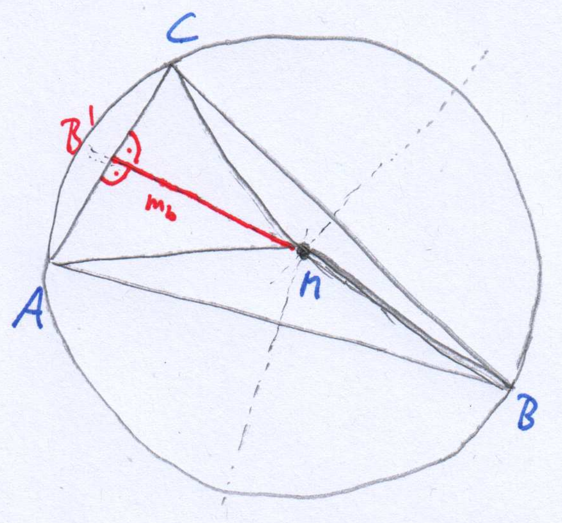
$$c^2 = \vec{c}^{\,2} = \vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{b} - \vec{a})^2 = b^2 - 2\underbrace{\vec{a} \cdot \vec{b}}_{0} + \vec{a}^{\,2}$$

$$= a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow \boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$ für rechtwinklige Dreiecke.

<u>Spezielle Punkte in beliebigen Dreiecken</u>

↳ Die <u>Mittelsenkrechten</u> treffen sich in einem Punkt M



Betrachte Dreieck AMC:

Da $\overline{AB'} = \overline{B'C}$,

$m_b = m_b$ und $\llcorner = \llcorner$

sind Dreiecke $AB'M$ und $CB'M$ kongruent (SWS)

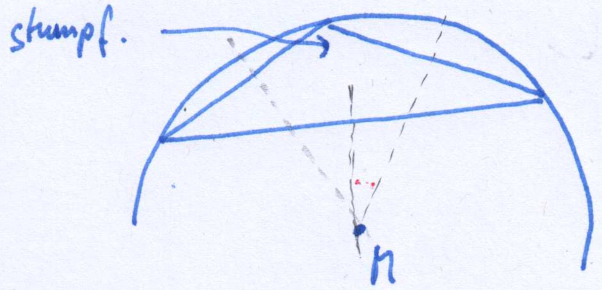
$\Rightarrow$ AMC ist gleichschenklig. $\Rightarrow \overline{AM} = \overline{CM}$

Genauso für Dreiecke $AMB \Rightarrow \overline{AM} = \overline{BM}$,

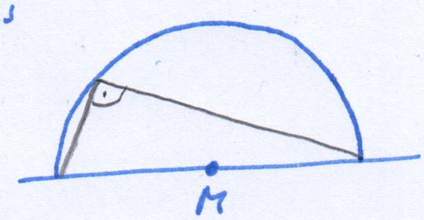
$CMB \Rightarrow \overline{CM} = \overline{BM}$

$\Rightarrow$ **Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ist Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks**

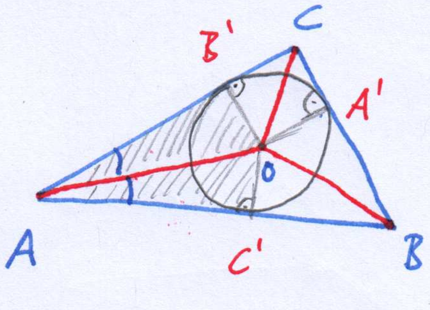
↳ Für spitzwinklige Dreiecke liegt M innerhalb des Dreiecks, für stumpfwinklige hingegen außerhalb:



↳ Für <u>rechtwinklige</u> Dreiecke liegt M auf der Hypothenuse: „Satz des Thales"



↳ Die <u>Winkelhalbierende</u> treffen sich in einem Punkt O.



Dreiecke $AB'O$ und $AC'O$ sind kongruent (SWW)

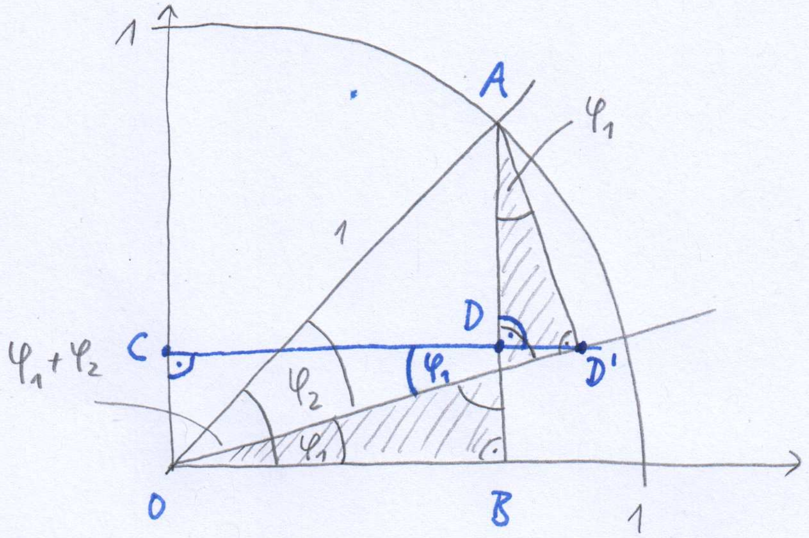
$\Rightarrow \overline{B'O} = \overline{C'O}$

genauso $\overline{A'O} = \overline{C'O} = \overline{B'O}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Schnittpunkt O der Winkelhalbierenden ist Mittelpunkt des Inkreises.}}$

↳ Die Seitenhalbierenden (auch „Schwere Linien") treffen sich im Schwerpunkt.

↳ Die Additionstheoreme der Winkelfunktionen



$$\boxed{\overline{AB} = \overbrace{\overline{OA}}^{1}\sin(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\boxed{\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB}}$$

↳ $\overline{AD} = \overline{AD'}\cos\varphi_1$ (Betrachte Dr'eck ADD')

$\overline{AD'} = \overbrace{\overline{OA}}^{1}\sin\varphi_2$ (Betrachte Dr'eck OAD')

$$\Rightarrow \boxed{\overline{AD} = \cos\varphi_1 \sin\varphi_2}$$

↳ $\overline{DB} = \overline{OC} = \overline{OD'}\sin\varphi_1$ (Betrachte Dr'eck OCD')

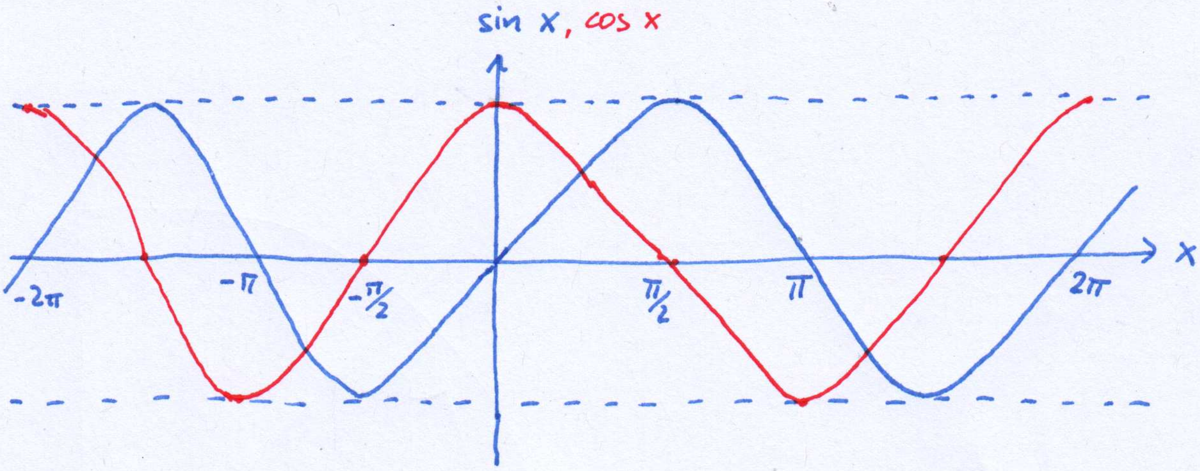
$\overline{OD'} = \underbrace{\overline{OA}}_{1}\cos\varphi_2$ (Betrachte Dr'eck $OD'A$)

$$\Rightarrow \boxed{\overline{DB} = \sin\varphi_1 \cos\varphi_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin(\varphi_1+\varphi_2) = \sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2}$$

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2$$

(Vorgriff zur Analysis)



Es gilt z.B. $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Benutze für

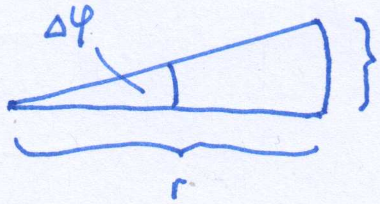
$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin\left(\varphi_1 + \varphi_2 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sin\varphi_1 \underbrace{\cos\left(\varphi_2 + \frac{\pi}{2}\right)}_{-\sin\varphi_2} + \cos\varphi_1 \underbrace{\sin\left(\varphi_2 + \frac{\pi}{2}\right)}_{\cos\varphi_2}$$

$$= \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2$$

Bekannte Formeln (siehe Analysis)

↳ Bogenstück

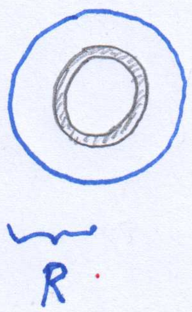


Bogenstück $\Delta U = r\,\Delta\varphi$

mit Winkel im Bogenmaß.

$$\Rightarrow \text{Kreisumfang} \quad \sum_{\text{Kreis}} \Delta U \longrightarrow \int_{\varphi=0}^{2\pi} r\, d\varphi = r \int_0^{2\pi} d\varphi = \underline{\underline{2\pi r}}$$

↳ Fläche



Ring hat äußeren Radius $r_a = r_i + \Delta r$

innere Radius r_i

Wenn Δr sehr klein ist, gilt

$$U_a = 2\pi (r_i + \Delta r) \approx U_i = 2\pi r_i$$

$\Longrightarrow$ Fläche des Ringes ist $\Delta A \approx U \cdot \Delta r$

$$= 2\pi r_i \, \Delta r + \underbrace{\dots \Delta r^2}_{\mathcal{O}(\Delta r^2)}$$

$\Longrightarrow$ Gesamtfläche des Kreises

$$A = \int_0^R 2\pi r \, dr = 2\pi \int_0^R r \, dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R$$

$$= \pi R^2$$