Basiswissen

↳ Wir setzen voraus, daß jeder mit der Menge der reellen Zahlen vertraut ist. Zur Erinnerung: (salopp)

Erweiterung ↓

$\mathbb{N}$: $1, 2, 3, \ldots$ natürliche Zahlen

$\mathbb{Z}$: $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ ganze Zahlen

$\mathbb{Q}$: $\frac{p}{q} \;\Big|\; q \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{Z}$ rationale Zahlen

$\mathbb{R}$: $\mathbb{Q}$ und zusätzlich π, $\sqrt{2}, e, \ldots$ reellen Zahlen.

irrationale Zahlen

↳ Zu zwei reellen $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ gibt es immer ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $x < q < y$.

„ $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$ ".

↳ Addition :

$$\underbrace{2 + 4}_{\text{Summanden}} = \underbrace{6}_{\text{Summe.}}$$

In der universitären Mathematik fängt man nun an, diese Verknüpfung mit Eigenschaften zu beschreiben, z.B.

$$2 + 4 = 4 + 2 \quad (\text{kommutativ})$$

$$(3 + 5) + 7 = 3 + (5 + 7) \quad (\text{assoziativ})$$

↳ Subtraktion : $\underset{\text{Minuend}}{48} - \underset{\text{Subtrahent}}{12} = \underset{\text{Differenz}}{36}$

$a - b \neq b - a$, d.h. <u>nicht</u> kommutativ,

$a - b = -(b-a)$

↳ kann auch als Summe verstanden werden:

$48 + (-12) = 36$

↳ Umordnen von Summanden ist oft hilfreich

z.B. $286 + 144 - 36 - 24$

$= (286 - 36) + (144 - 24)$

$= 250 + 120 = 370$

↳ Multiplikation : $\underset{\text{Faktor}}{3} \cdot \underset{\text{Faktor}}{4} = \underset{\text{Produkt}}{12}$

wie bei der Summe ist die Reihenfolge und auch Gruppierung egal (kommutativ und assoziativ)

$(a \cdot b) \cdot c = c \cdot (a \cdot b) = (c \cdot a) \cdot b = \ldots$

↪ Im Allgemeinen sind wir in der Mathematik salopp gesagt schreibf. Der Multiplikationspunkt wird oft weggelassen (wenn klar).

$$a + a + a = 3a$$

d.h. auch, daß wir Schreibweisen wie

$\frac{7}{2} = 3{,}5 = 3\,\frac{1}{2}$ vermeiden, da Verwechselungsgefahr mit $3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ besteht.

↪ Division : $\quad a \quad : \quad b \quad = \quad c$

Divident $\qquad$ Divisor $\qquad$ Quotient

benutzen wir selten, sondern lieber Brüche:

$$\frac{a}{b} = c = \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$$

↪ Division ist die Umkehroperation zur Multiplikation,

d.h. $\quad b \cdot \frac{a}{b} = \frac{\cancel{b} \cdot a}{\cancel{b}} = a \qquad$ „Kürzen"

↪ Man dividiert durch eine Zahl, indem man mit dem Kehrwert multipliziert.

$$\frac{5}{2/3} = 5 : \frac{2}{3} = 5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 5}{2} = \frac{15}{2}$$

↳ Punktrechnung vor Strichrechnung:
Multiplikation und Division haben Vorrang vor der Summe, d.h.

$(x+2)(y+3)$ muß mit Klammern umsetzt werden,

ausonsten wird bei $x + \underbrace{2y}_{\text{zuerst gerechnet.}} + 3$

↳ Bei der Bruchrechnung werden Summanden auf einen gemeinsamen Nenner gebracht.

$$\frac{8}{7} - \frac{3}{5} = \frac{8 \cdot 5}{7 \cdot 5} - \frac{7 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{40 - 21}{35} = \frac{19}{35}$$

„erweitert"

Hilfreich ist der „kleinste gemeinsame Nenner".

↳ Wenn zwei Faktoren gleich sind, ist das Produkt das „Quadrat". $a \cdot a = a^2$

↳ Durch Ausmultiplizieren (Distributivgesetz)

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + \underbrace{ab + ba}_{2ab} + b^2$$

1. Binomische Formel

↳ Setze $b = -c$

$$\Rightarrow (a + (-c))^2 = (a-c)^2$$

$$= a^2 - 2ac + c^2 \quad \text{2. Binom. Formel}$$

↳ Alter Partytrick

Quadratberechnung von Zahlen nahe 50, 500, ...

$$(50 + x)^2 = 2500 + 100 \cdot x + x^2$$

$$= (25 + x) \cdot 100 + x^2$$

z.B. $48^2 = 2304$, $54^2 = 2916$

genauso:

$$(500 + x)^2 = 250\,000 + 1000x + x^2$$

$$= (250 + x) \cdot 1000 + x^2$$

z.B. $511^2 = 261\,121$ etc.

↳ Auch im Zeitalter von Smartphones ist schriftliche Division nützlich.

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x - 2} = ?$$

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 4x^2 + 5x - 2) : (x-2) = x^2 - 2x + 1 \\
-(x^3 - 2x^2) \\
\hline
\quad (-2x^2 + 5x) \\
\quad -(-2x^2 + 4x) \\
\hline
\qquad\quad (x - 2) \\
\qquad\quad -(x-2) \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Antwort: $(x-1)^2$

↳ Wenn es nicht aufgeht, bleibt ein Rest übrig:

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 5x \overbrace{-3}^{-2-1}}{x-2} = (x-1)^2 + \frac{-1}{x-2}.$$

↳ Von Quadraten zu Potenzen :

Wiederholte Faktoren werden zusammengefaßt :

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$$

Oder allgemein: $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} = a^n$

Exponent

Basis

↳ Insbesondere : $0^n = 0 \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

$1^n = 1 \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

↳ Produkt von Potenzen :

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ Faktoren}} = a^{n+m}$$

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{(a \cdot \ldots \cdot a)}_{n} \underbrace{(b \cdot \ldots \cdot b)}_{n} = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (ab)}_{n}$$

$$= (a \cdot b)^n$$

↳ Kehrwert : $\frac{a^4}{a^1} = \frac{\cancel{a} \cdot a \cdot a \cdot a}{\cancel{a}} = a \cdot a \cdot a = a^3 = a^{4-1}$

also $\frac{1}{a} = a^{-1}$

Oder allgemein : $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Beispiel: $\frac{12^4}{18^3}$ Achtung: 12 und 18 nicht kürzen!

$$= \frac{(2\cdot 2\cdot 3)^4}{(2\cdot 3\cdot 3)^3} = \frac{2^4\cdot 2^4\cdot 3^4}{2^3\cdot 3^3\cdot 3^3} = 2^{4+4-3}\cdot 3^{4-3-3}$$

$$= 2^5\cdot 3^{-2} = \frac{2^5}{3^2} = \frac{32}{9}$$

↳ Potenzen von Potenzen:

Betrachte a^3 zur Basis $a = 10^2$

$$a^3 = a\cdot a\cdot a$$

$$= 10^2\cdot 10^2\cdot 10^2 = 10^{2+2+2} = 10^{2\cdot 3}$$

$$\Longrightarrow \quad (a^m)^n = a^{m\cdot n}$$

↳ Spezialfall a^0: $\underline{\underline{a^n}} = a^{n+0} = \underline{\underline{a^n\cdot \underbrace{a^0}_{1}}}$

$\Rightarrow$ Für alle $(\forall)$ $a \neq 0$ gilt $a^0 = 1$

↳ Es ist sinnvoll und hilfreich, ein paar Werte von 2^n zu kennen:

insbesondere $2^3 = 8$, $(\Rightarrow 2^6 = 64)$

$2^{10} = 1024$.

↳ Wenn die Gleichung $a^n = b$ für b gesucht ist, ist dies die o.g. Potenzrechnung.

Ist jedoch b und n gegeben und wir a suchen, ist dies die Wurzelrechnung.

$$a = \sqrt[n]{b} \Longrightarrow a^n = b$$

↳ Daher gilt auch die Schreibweise (siehe Potenzen von Potenzen)

$$a = b^{\frac{1}{n}} \Longrightarrow a^n = \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^n = b^{\frac{1}{n}\cdot n} = b^1 = b \checkmark$$

↳ Diese macht insbesondere das mehrfache Wurzelziehen einfach:

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2}$$

↳ <u>ACHTUNG</u>: Im Allgemeinen sind Wurzeln nicht eindeutig.

<u>Konvention</u>:

$$2^2 = 4 \quad \text{und} \quad (-2)^2 = 4, \quad \sqrt{4} = 2, \quad -\sqrt{4} = -2$$

↳ Nun können wir auch b^q mit $q = \frac{m}{n}$ berechnen:

$$b^{\frac{m}{n}} = b^{m\cdot\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b^m} = \left(\sqrt[n]{b}\right)^m$$

z.B. $8^{2/3} = \left(8^{1/3}\right)^2 = 2^2 = 4 \checkmark$

↳ Verallgemeinerung der binomischen Formeln:

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b)$$

$$= a^3 + \underline{a^2b} + \underline{2a^2b} + \underline{2ab^2} + \underline{b^2a} + b^3$$

$$= 1a^3 + \boxed{3}a^2b + \boxed{3}ab^2 + 1b^3$$

$$(a+b)^4 = \ldots = 1a^4 + \boxed{4}a^3b + \boxed{6}a^2b^2 + \boxed{4}ab^3 + 1b^4$$

Die Koeffizienten dieser Struktur sind im Pascal'schen Dreieck zusammengefaßt:

$k=0$, $k=1$, $k=2$

$(a+b)^0$	1	← $n=0$
$(a+b)^1$	1 1	← $n=1$
$(a+b)^2$	1 2 1	← $n=2$
$(a+b)^3$	1 3 3 1	
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1	
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1	
$(a+b)^6$	1 6 15 20 15 6 1	
⋮		

Diese heißen „Binomialkoeffizienten" $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$

„n über k"

wobei $n! = n\cdot(n-1)!$ und $0! = 1$

„n Fakultät"

z.B. $\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!\,2!} = \frac{{}^{2}\cancel{4}\cdot 3\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}{\cancel{2}\cdot\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}} = 2\cdot 3 = 6$ ✓

↳ Vom Pascal'schen Dreieck sehen wir schon:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!\,0!} = \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}\cdot 1} = 1 \qquad \forall\, n \geq 0$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!\cdot 1!} = \frac{n\cdot\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}\;1} = n \qquad \forall\, n \geq 1$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

↳ Summensymbol $\sum_{n=0}^{N} A_n = A_0 + A_1 + \ldots + A_N$

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k}$$

$$= a^n + n\,a^{n-1}\,b + \ldots$$

$$= \binom{n}{0} a^{n-0}\, b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1}\, b^1 + \ldots$$

↳ Produktsymbol $\prod_{n=1}^{N} C_n = C_0 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot \ldots \cdot C_N$

z.B. $k! = \prod_{j=1}^{k} j = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k$

$(a-b)^n$ ergibt sich aus $(a+b)^n$ mit Transformation

$b \longrightarrow -b \quad (\Rightarrow b^2 \rightarrow b^2, \; b^3 \rightarrow -b^3, \text{ etc})$

z.B. $\quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

↪ Auch die 3. binomische Formel $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

können wir verallgemeinern:

$$(a^n - b^n) = a^n \Big(1 - \underbrace{\left(\tfrac{b}{a}\right)}_{q}{}^{n}\Big) = a^n (1 - q^n)$$

Nun betrachte die „geometrische" Partialsumme

$$S_4 = \underbrace{q^0}_{1} + q^1 + q^2 + q^3 = \sum_{k=0}^{3} q^k$$

$$q\,S_4 = \qquad q^1 + q^2 + q^3 + q^4 .$$

bilde Differenz

$$S_4(1-q) = 1 - q^4$$

Also z.B.

$$(1-q^4) = (1-q)(1+q+q^2+q^3)$$

$$\Rightarrow (a^4 - b^4) = a^4(1-q^4) = a^4(1-q)(1+q+q^2+q^3)$$

$$= a(1-q) \cdot a^3(1+q+q^2+q^3)$$

$$= a\left(1-\frac{b}{a}\right) \cdot a^3\left(1+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^3}{a^3}\right)$$

$$= (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

Termumformungen

↳ Wir haben schon einige Termumformungen praktiziert, z.B. Ausklammern, Ausmultiplizieren

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad \text{(Distributivgesetz)}$$

↳ Hier soll es um weitere Manipulationen von Gleichungen gehen, so daß Lösungen einfacher zu finden sind.

$$A = B \;\Big|_{Op} \quad \Longleftrightarrow \quad A' = B'$$

Die Operation, die auf beiden Seiten der Gleichung angewendet wird, soll umkehrbar sein, so daß $A' = B'$ äquivalent zu $A = B$ ist.

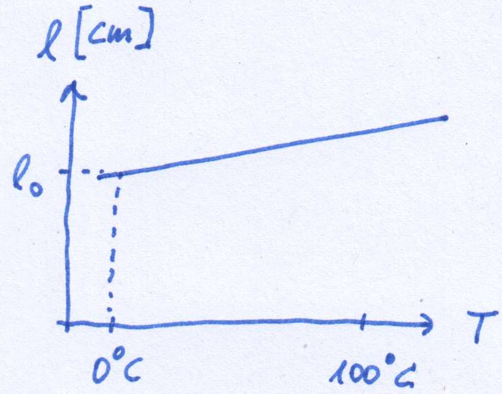
z.B.

$$\begin{aligned}
& 2x^2 - 5 = x^2 - 3x + 5 && \big| - x^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & x^2 - 5 = -3x + 5 && \big| + 3x \\
\Longleftrightarrow \quad & x^2 + 3x - 5 = 5 && \big| - 5 \\
\Longleftrightarrow \quad & x^2 + 3x - 10 = 0 &&
\end{aligned}$$

↳ Wir können Gleichungen nach Größen, die uns interessieren, oftmals auflösen.

Übungsbeispiel: Sei l die Länge eines Metallstabs.

Diese Länge hängt von der Temperatur ab.



Empirisch durch die Formel

$$\boxed{l = l_0 (1 + \alpha T)}$$

beschrieben, wobei T in °C gemessen wird, und l_0 die Länge bei $T = 0°C$ ist.

<u>Achtung:</u> l ist eine Funktion von T

„Abbildungen"

	Schule	Univ. Mathe
l	Wert	Abb. (Funktion)
$l(T)$	Funktion	Funktionswert.

<u>Uni:</u> l : {Menge der Temp.} $\longrightarrow$ {Menge von Längen}

$$T \longmapsto l(T)$$

Einheiten: $[l] = [l_0]$ = cm, mm, in, mi, ...

$[T] = [1/\alpha]$ = °C

$$l = l_0 (1 + \alpha T)$$

↳ Nach l_0 auflösen:

$$l = l_0 (1 + \alpha T) \quad \Big| : (1 + \alpha T)$$

$$\Rightarrow \frac{l}{1+\alpha T} = l_0 \quad \Rightarrow \quad l_0 = \frac{l}{1 + \alpha T}$$

↳ Nach α auflösen:

$$l = l_0 (1 + \alpha T) = l_0 + \alpha l_0 T \quad \Big| - l_0$$

$$\Rightarrow l - l_0 = \alpha l_0 T \quad \Big| \cdot \frac{1}{l_0 T}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{T}\left(\frac{l}{l_0} - 1\right) = \frac{1}{T} \frac{(l - l_0)}{l_0}$$

Solche Umformungen funktionieren auch mit <u>Ungleichungen</u>

$$a > b \quad \Big| + c$$

$$\Leftrightarrow a + c > b + c \quad \Big| \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 2(a+c) > 2(b+c) \quad \Big| \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow -2(a+c) < -2(b+c)$$

Achtung!

↳ Bei Multiplikation mit einer negativen Zahl dreht sich die Ungleichung um: $2 < 4 \quad \Big| \cdot (-1)$

$$\Leftrightarrow -2 > -4$$

Kehrwert: $1 < 3 \quad \Big| (\ )^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad 1 > \frac{1}{3}$

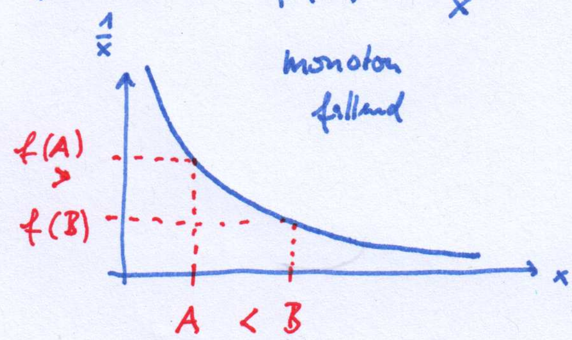
Termumformungen können wie Anwendungen einer <u>umkehrbaren</u> Funktion verstanden werden:

$$A = B \quad \big|\, +c \qquad \hat{=} \qquad f(A) = f(B)$$

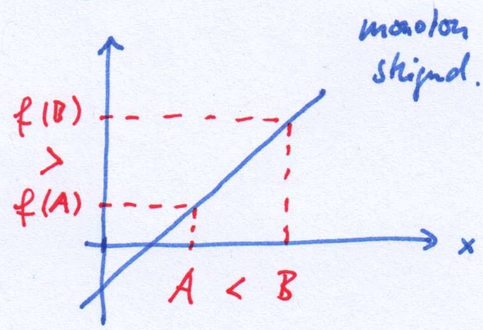
$$A+c = B+c \qquad \text{mit } f(x) = x+c$$

↳ Diese Funktion sind i.A. monoton steigend oder monoton fallend.

Kehrwert: $f(x) = \frac{1}{x}$

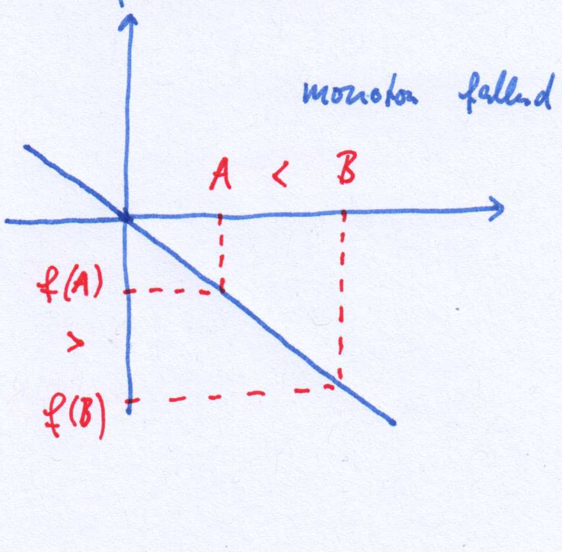


$f(x) = x + c$



Multiplikation mit neg. Konstante

$f(x) = -2x$



$\boxed{\text{Bei monoton fallenden Funktionen dreht sich die Ungleichung um.}}$

Zurück zu den Gleichungen: quadratische Gleichung

$$\boxed{x^2 + px + q = 0}$$ (pq Formel)

Löse nach x durch <u>quadratische Ergänzung</u> auf

Vergleiche $x^2 + px$ mit $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Setze $a = x \Rightarrow x^2 + 2xb + b^2$
$= (x+b)^2$

Setze $2b = p \Leftrightarrow b = \frac{p}{2}$

$$\Rightarrow x^2 + px$$

$$= \underbrace{x^2 + px + \overbrace{\frac{p^2}{4}}^{\text{Ergänzung.}}}_{(x+\frac{p}{2})^2} \overbrace{- \frac{p^2}{4}}$$

$$= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} \Longrightarrow x^2 + px + q$$

$$= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0 \quad \Big| + \frac{p^2}{4} - q$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q \quad \Big| \sqrt{\ldots}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \Big| - \frac{p}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$$

Ähnlich: $a x^2 + bx + c = 0 \quad \Big| : a$ mit $a \neq 0$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\frac{4a}{4a}} = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)$$

Beispiel: $x^2 + 3x - 10 = 0$

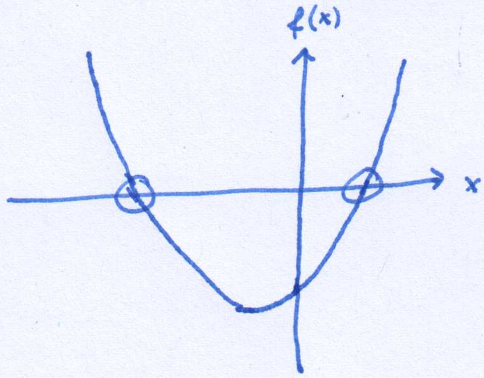
$$\Rightarrow \quad x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 10} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{40}{4}}$$

$$= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{7}{2}$$

also $\boxed{x = 2}$ oder $\boxed{x = -5}$

↳ Die Funktion $f(x) = x^2 + 3x - 10$ (Parabel)

hat zwei Nullstellen:



↳ Im ~~Reellen~~ Reellen kann eine Parabel zwei, eine (doppelte), oder keine Nullstelle haben, je nachdem, ob das Argument der Wurzel positiv, Null, negativ ist:

$\frac{p^2}{4} > q$: 2 Nullstellen

$\frac{p^2}{4} = q$: 1 (doppelte) Nullstelle

$\frac{p^2}{4} < q$: 0 Nullstellen.

↳ Hier: $f(x) = x^2 + 3x - 10 = (x-2)(x+5)$