Analysis

Folgen und Reihen

↪ Die DIN A Papierformate sind so konstruiert, daß beim Falten ein Rechteck mit gleichen Seitenverhältnissen entsteht.

* Fläche halbiert sich beim Falten: $A_{n+1} = \frac{1}{2} A_n$

$\Rightarrow \quad A_0 \,, \quad A_1 = \frac{1}{2} A_0 \,, \quad A_2 = \frac{1}{2} A_1 = \frac{1}{2^2} A_0 \,, \quad A_3 = \frac{1}{2} A_2 = \frac{1}{2^3} A_0 \ldots$

$\Rightarrow \quad \boxed{A_n = \frac{1}{2^n} A_0}$

* Seitenverhältnisse bleiben gleich:

$A_0 = \underset{\text{lang}}{a} \cdot \underset{\text{kurz}}{b} \,, \qquad A_1 = \underset{\text{kurz}}{\left(\frac{a}{2}\right)} \cdot \underset{\text{lang}}{b}$

also $\frac{a}{b} = \frac{b}{\left(\frac{a}{2}\right)} = \frac{2b}{a} \quad \Rightarrow \quad a^2 = 2b^2$

Allgemeiner: $A_n = \underset{\text{lang}}{a_n} \cdot \underset{\text{kurz}}{b_n} \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{2}} a_n$

Einsetzen: $A_n = a_n \cdot \frac{a_n}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad a_n^2 = \sqrt{2} A_n$

$= 2^{\frac{1}{2}} \left(2^{-n} A_0\right)$

$= A_0 \, 2^{\frac{1}{2} - n} \quad \Big| \, (\ldots)^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \quad \boxed{a_n = \sqrt{A_0} \; 2^{\frac{1}{4} - \frac{n}{2}}}$

* Nun ist $A_0 = 1\, m^2 \rightarrow \sqrt{A_0} = m$

Was wir soeben formuliert haben sind Folgen:

$$\frac{A_n}{m^2} = 2^{-n} \quad : \quad \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right)$$

$$\frac{a_n}{m} = 2^{\frac{1}{4}-\frac{n}{2}} \quad : \quad (1{,}189,\ 0{,}841,\ 0{,}594,\ 0{,}420,$$
$$0{,}297,\ 0{,}210,\ 0{,}149,\ \dots)$$

Seitenlängen von A_4 in m

↳ Die zentrale Frage bei Folgen ist: konvergiert sie oder divergiert sie?

↳ obige Bsp. konvergieren gegen Null (Nullfolgen)

↳ $(1, 2, 3, 4, 5, \dots)$ divergiert.

↳ Wenn eine Folge a_n gegen den „Grenzwert" a konvergiert, wird der Abstand von a_n zu a mit wachsendem n immer kleiner.

$$a_n - a \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$$a_n \xrightarrow{n \to \infty} a$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

↳ In der universitären Mathematik wird das folgende Kriterium benutzt:

„Zu jedem (noch so kleinen) $\varepsilon > 0$ (z.B. $\varepsilon = 10^{-1000}$)
existiert ein $N \in \mathbb{N}$ (z.B. $N = 10^{10^{10}}$ („Googol"))
so, daß $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N$"

↳ Ein wichtiges Beispiel ist die Eulerkonstante
$e = 2{,}71828\ldots$ als Grenzwert der Folge

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{a_n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \underbrace{\underbrace{\binom{n}{0}}_{1} 1^n \underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)^0}_{1}}_{1} + \underbrace{\underbrace{\binom{n}{1}}_{\cancel{n}} 1^{n-1} \underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)^1}_{\frac{1}{\cancel{n}}}}_{1} + \ldots$$

$\Longrightarrow$ größer als 2 für $n \geq 2$

↳ e ist auch Grenzwert der Folge S_n, wobei

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$ Summen mit $(n+1)$ Summanden.

d.h. $$\lim_{n\to\infty} S_n = e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Eine solche unendliche (Anzahl Summanden) Summe nennen wir eine „Reihe".

↳ Betrachte nochmal das Beispiel $S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k$

d.h. $S_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + x^n$

$x\, S_n = x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + x^n + x^{n+1}$

$\Rightarrow (1-x)\, S_n = 1 - x^{n+1} \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}}$

↳ Auch hier ist der Grenzfall $n \to \infty$ möglich, denn

$$x^{n+1} \longrightarrow \begin{cases} 0, & \text{wenn } |x| < 1 \\ \infty, & \text{divergiert} \end{cases}$$

Also ist $\boxed{S_n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1-x}, \quad \text{wenn } |x| < 1}$

Insbesondere:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{2}}$$

↳ Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 1^k = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$ divergiert.

* „Eine Reihe ist eine Folge von Partialsummen"

* **Die Summanden einer konvergenten Reihe bilden eine Nullfolge**

* Umgekehrt: Selbst wenn die Summanden immer kleiner werden (Nullfolge bilden), konvergiert nicht jede Reihe:

Harmonische Reihe:

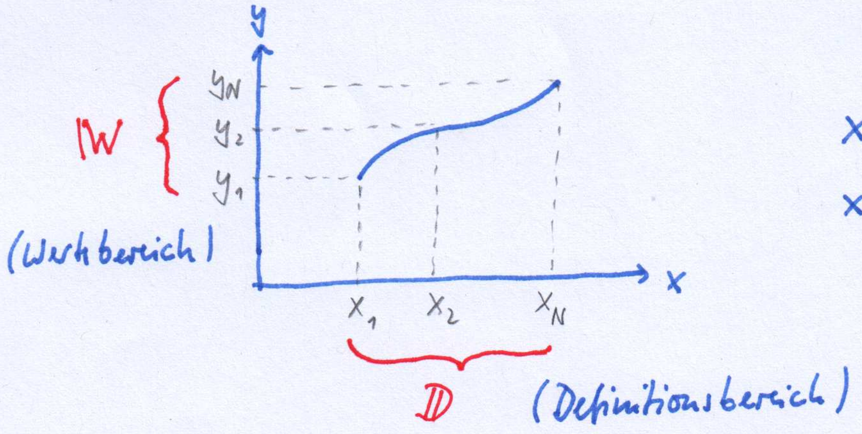
$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}}+\ldots$$

ist größer als $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots \longrightarrow \infty$

„untere Schranke"

Funktionen und Stetigkeit (reellwertig)

↳ Funktionen einer Variablen



Zahlenpaare

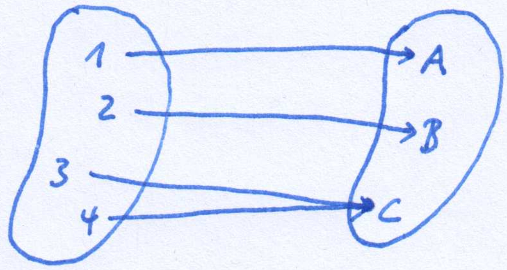
$x_1 \in \mathbb{D} \longrightarrow y_1 \in \mathbb{W}$

$x_2 \in \mathbb{D} \longrightarrow y_2 \in \mathbb{W}$

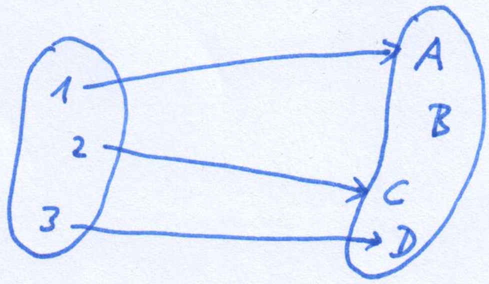
$\vdots$

Abbildung $f: \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{W}: \quad x \in \mathbb{D} \longmapsto y = f(x) \in \mathbb{W}$

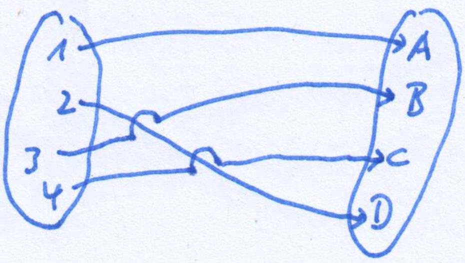
surjektiv: Jedes Element des Wertbereichs wird mindestens einmal erreicht, vielleicht auch mehrfach:



injektiv: Der mehrfache Fall tritt nicht auf, manche $y \in \mathbb{W}$ werden auch gar nicht erreicht.



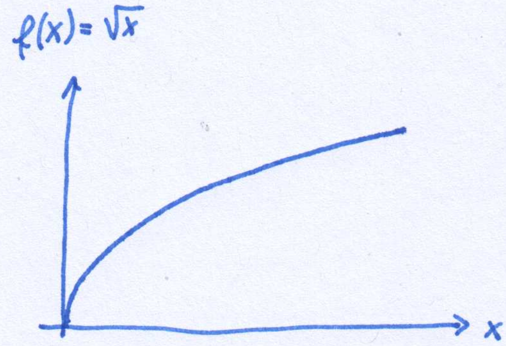
bijektiv: surjektiv und injektiv: Eineindeutig!



Beispiele von Funktionen:

(1) Quadratwurzel:

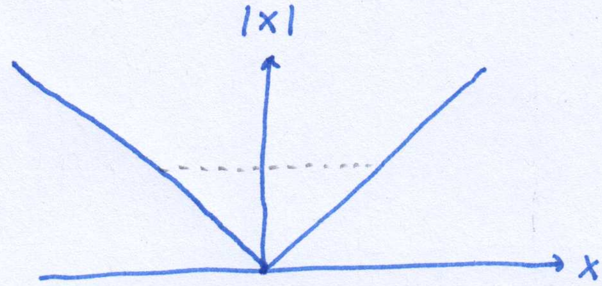
$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$



bijektiv.

(2) Betragsfunktion:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto |x| \end{aligned}$$



surjektiv, nicht injektiv

(3) Polynome vom Grad n

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{mit} \quad a_n \neq 0$$

z.B. Gerade $(n=1)$: $f(x) = a_1 x + a_0$ (affin linear)

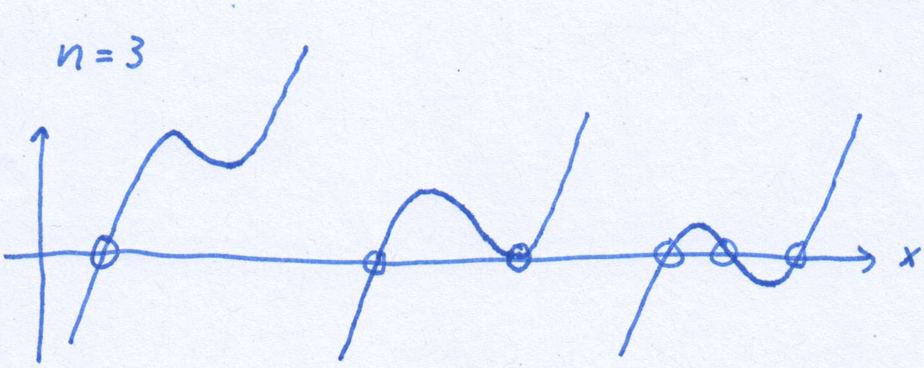
Parabel $(n=2)$: $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$a_2 > 0$: Parabel oben geöffnet.

$a_2 < 0$: Parabel unten geöffnet.

↪ Im reellen haben Polynome vom Grad n höchstens n Nullstellen.

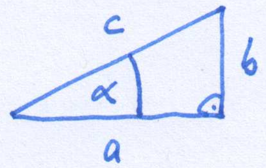
z.B. $n = 3$



④ Trigonometrische Funktionen $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$

$$\mathbb{D} = \begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{R} \setminus \{?\} \end{cases}, \quad \mathbb{W} = \begin{cases} [-1,1] & \text{für } \sin, \cos \\ \mathbb{R} & \text{für } \tan \end{cases}$$

Wiederholung rechtwinklige Dreiecke:



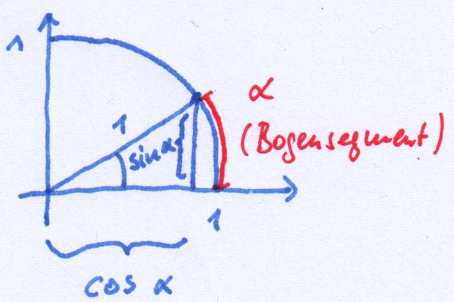
a : Ankathete ⎫
b : Gegenkathete ⎭ zu α
c : Hypothenuse

mit Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$

↳ $\sin\alpha = \frac{b}{c}$, $\cos\alpha = \frac{a}{c}$, $\tan\alpha = \frac{b}{a}$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{\cancel{c}\,\frac{b}{c}}{\cancel{c}\,\frac{a}{c}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

↳ Wähle $c = 1$ $\Rightarrow$ Einheitskreis



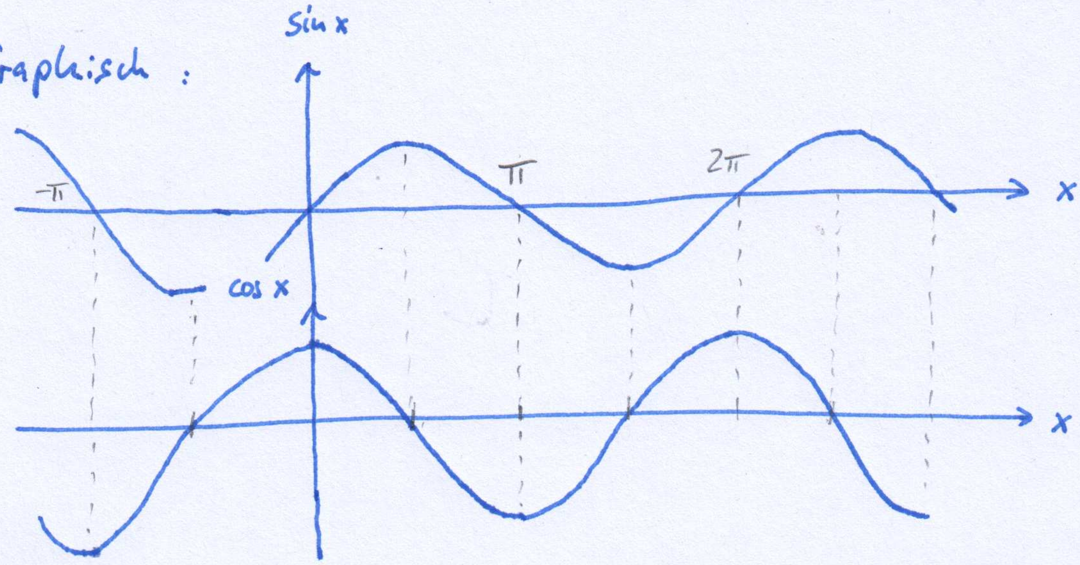
$$\Rightarrow \boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

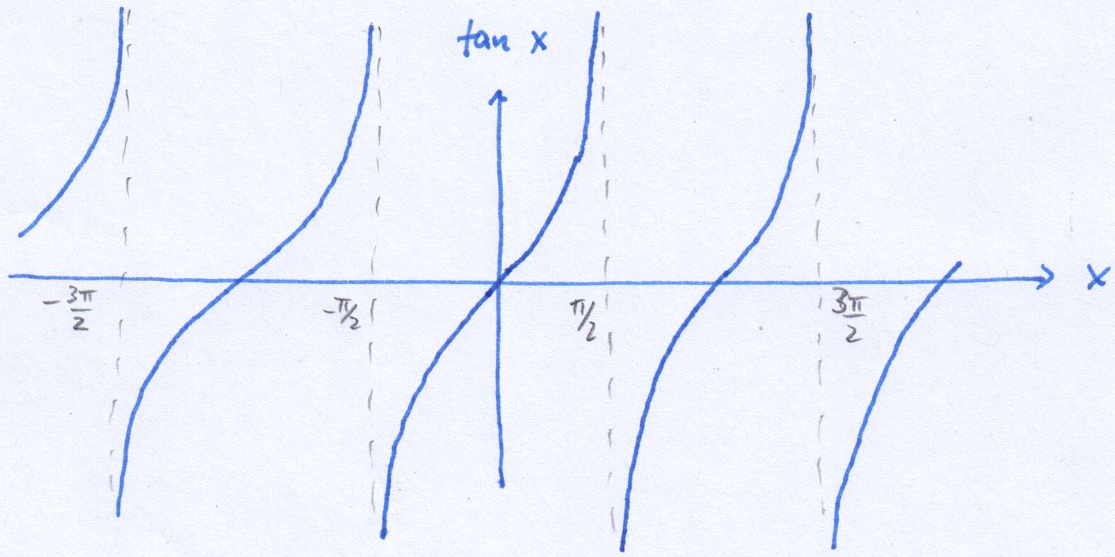
ACHTUNG: Hier benutzen wir das Bogenmaß „Radiant", eine Zahl ohne Einheiten.

$360° \mathrel{\hat{=}} 2\pi$
$180° \mathrel{\hat{=}} \pi$
$90° \mathrel{\hat{=}} \pi/2$
$60° \mathrel{\hat{=}} \pi/3$
$45° \mathrel{\hat{=}} \pi/4$

$\pi = 3,14159 \ldots$

Graphisch :





Im Definitionsbereich des Tangens nehme $\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;,\; k \in \mathbb{Z} \right\}$ aus.

↳ Es gibt viele Relationen, z.B.

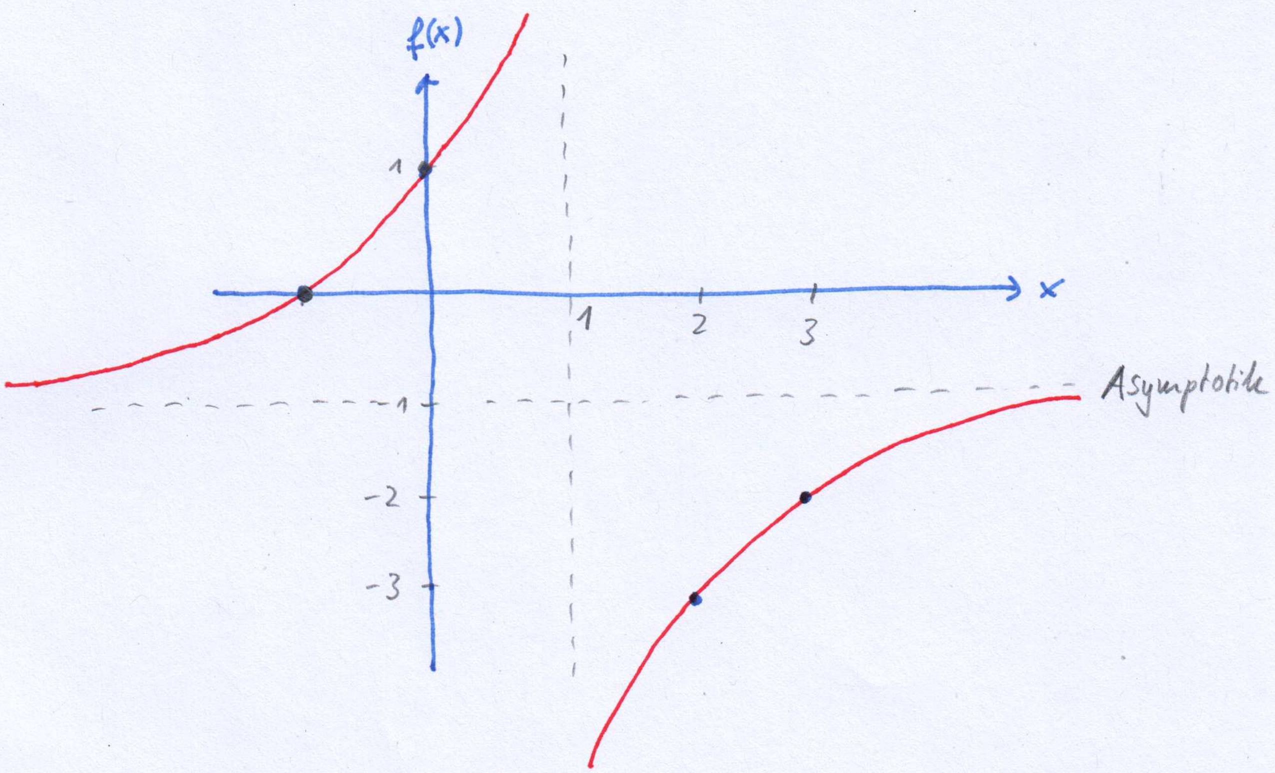
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$ etc.
- $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ gerade Funktion
- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ ungerade Funktion.

(5) Rationale Funktionen $\quad f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

mit
$$\left.\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \\ Q(x) &= b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m \end{aligned}\right\} \text{Polynome}$$

$$\mathbb{D} = \{ x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0 \}, \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}$$

z.B. $\quad f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$



↳ Nullstellen bei $\quad x = -1$

↳ Singularitäten bei $\quad x = 1$

↳ Asymptotik: $\quad \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -1$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$$

⑥ Exponentialfunktion : $\exp(x) = e^x$, $e = 2{,}71828\ldots$

↳ Wir hatten schon e als Folgengrenzwert und Reihe:

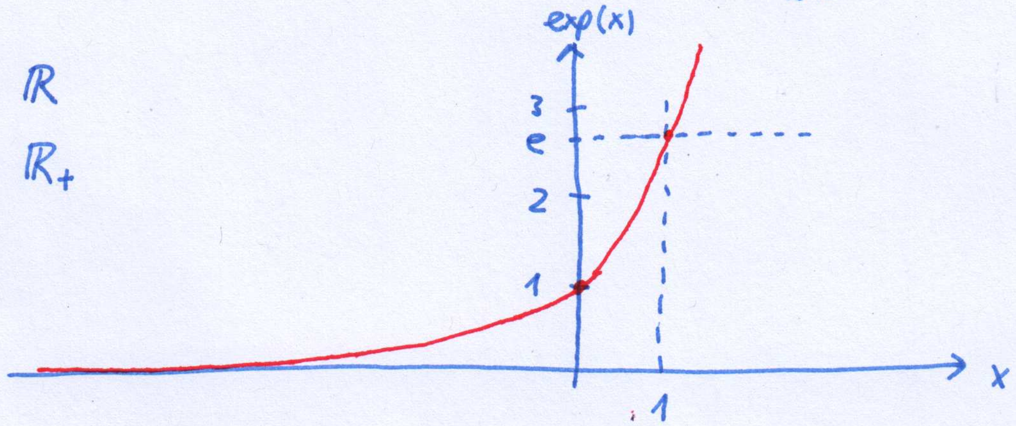
$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad , \quad e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

↳ Darstellung für die exp-Funktion:

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad , \quad \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$\mathbb{W} = \mathbb{R}_+$



↳ Die Exp-Funktion genügt der Funktionalgleichung

$$\exp(x)\,\exp(y) = e^x e^y = e^{x+y} = \exp(x+y)$$

<u>N.R.</u> :

$$\exp(x)\cdot\exp(y) = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n\right] = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}+\frac{y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n$$

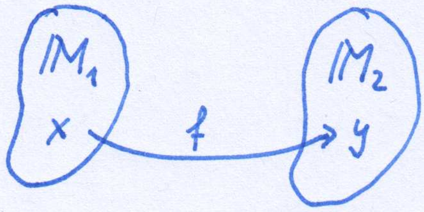
$$= \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{x+y+\frac{xy}{n}}{n}\right]^n = \exp(x+y)$$

vernachlässigbar für große n

Umkehrfunktionen

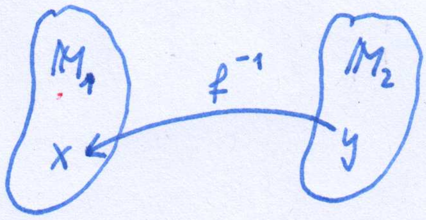
Sei f eine bijektive Abbildung

$$f: M_1 \longrightarrow M_2$$
$$x \longmapsto y = f(x)$$



(d.h. jedem $x \in M_1$ wird genau ein Element $y \in M_2$ zugeordnet.) Dann gibt es eine Umkehrfunktion

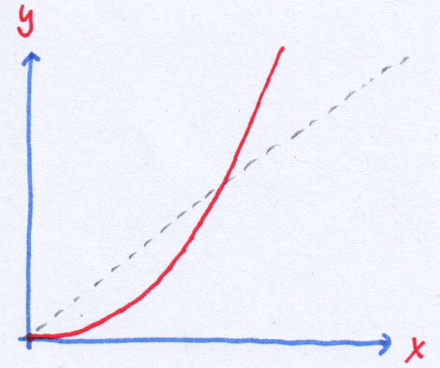
$$f^{-1}: M_2 \longrightarrow M_1$$
$$y \longmapsto x = f^{-1}(y)$$



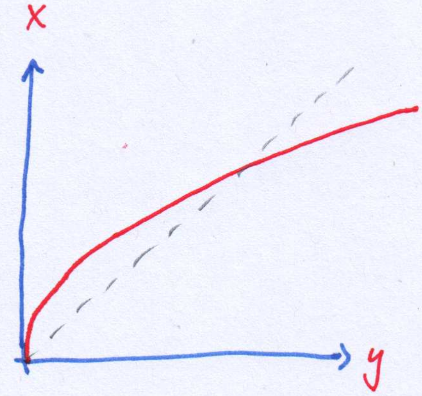
(ACHTUNG: Schreibweise)

d.h. $\quad x = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = \underbrace{(f^{-1} \circ f)}_{Id}(x)$

↳ Praktisch heißt dies, daß der Graph von f um die $45°$-Achse geflippt wird:

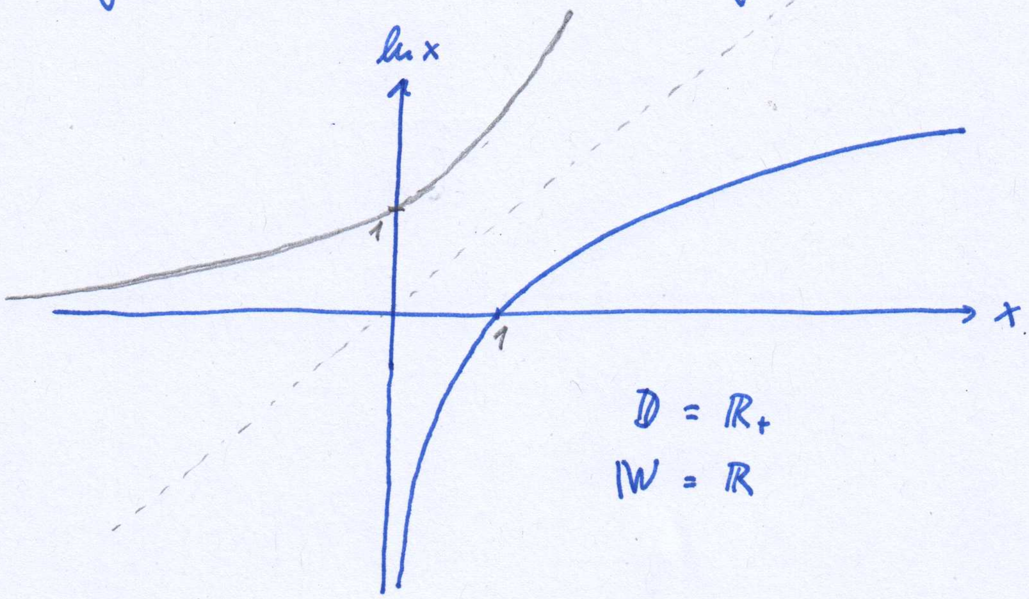


$y = x^2$



$x = \sqrt{y}$

⑦ $y = e^x \longleftrightarrow x = \ln y$



↳ $e^{\ln x} = x = \ln(e^x)$

↳ Es gilt für $a, b \in \mathbb{R}_+$: $\boxed{\ln(ab) = \ln a + \ln b}$

denn: $a \cdot b = e^{\ln a} e^{\ln b} = e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln(a \cdot b)}$

↳ Genauso: $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1} = e^{\ln a} e^{-\ln b} = e^{\ln a - \ln b} = e^{\ln(\frac{a}{b})}$

↳ „Schlimmer" noch:

$$\ln(a^n) = \ln(\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}) = \underbrace{\ln a + \ln a + \ldots + \ln a}_{n \text{ Summanden}}$$

$$= n \ln a$$

↳ Das haben wir übrigens gerade benutzt mit $n = -1$:

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln(b^{-1})$$

$$= \ln a - \ln b.$$

Wir benutzen in Mathe / Physik grundsätzlich den „natürlichen" Logarithmus, d.h. zur Basis e.

Alles andere läßt sich schnell umrechnen, z.B. zur Basis 2:

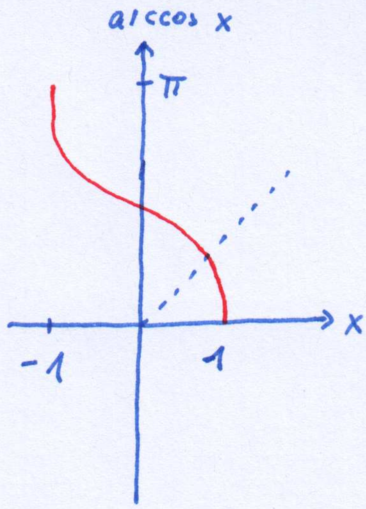
$$y = \log_2(x)$$

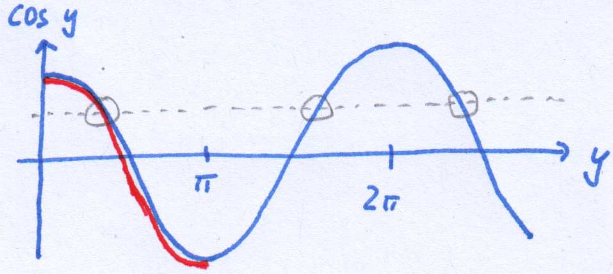
$$\Rightarrow \quad x = 2^y = e^{\ln(2^y)} = e^{y \ln 2} \quad \Big| \ln(\dots)$$

$$\Rightarrow \quad \ln x = y \ln 2 \quad \Rightarrow \quad y = \log_2(x) = \frac{\ln x}{\ln 2} \quad \text{etc.}$$

Bitte rechnen Sie mit natürlichen logs, d.h. $\ln x$, dann ist das Leben schöner.

(8) Arkus-Kosinus $\quad \arccos x = y \quad \longleftrightarrow \quad x = \cos y$





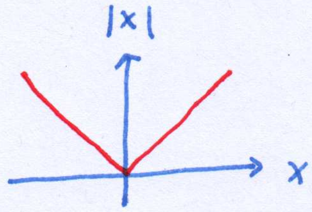
$$\arccos : \; [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

Man suche sich einen Zweig von cos, auf dem die Abbildung bijektiv, d.h. man schränke den Definitionsbereich von cos ein. (Konvention)

Stetigkeit von Funktionen:

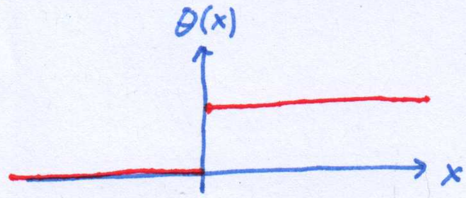
↳ Salopp: Stetige Funktionen haben Graphen, die sich ohne Abzusetzen zeichnen lassen.

z.B. $f(x) = |x|$



nicht aber Heaviside Theta Funktion (Stufenfunktion)

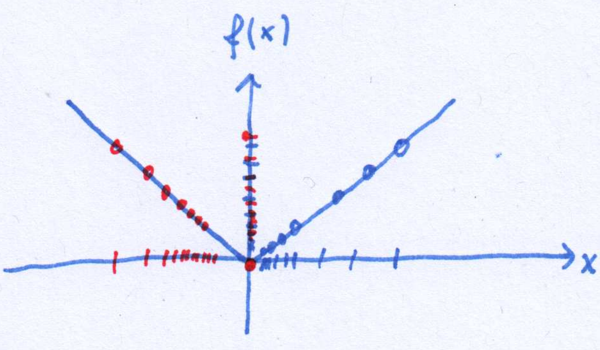
$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



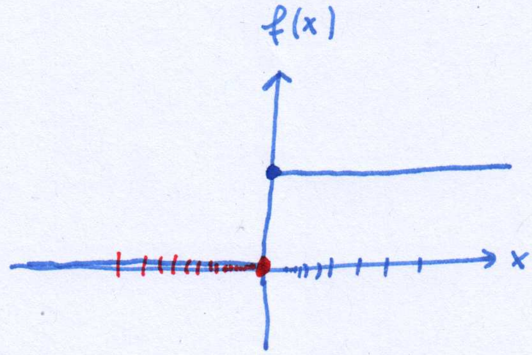
↳ Schlimmer unstetiger Fall: $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rational} \\ 0, & x \text{ irrational} \end{cases}$

↳ Mathematisch wird es wiefolgt formuliert:

$f: \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{W}$ ist im Punkt $x_0 \in \mathbb{D}$ genau dann stetig, wenn jede Folge von Punkten $x_n \in \mathbb{D}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ gilt, daß auch $f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} f(x_0)$



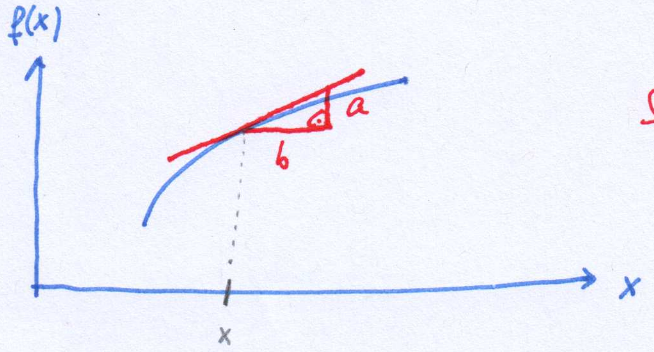
stetig ☺



unstetig. ☺

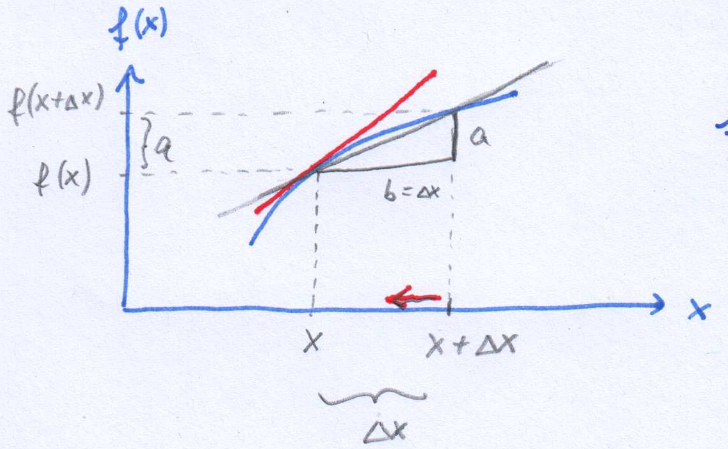
Ableitung : Differentialrechnung

↪ Die Steigung einer Tangente am Graphen von f an der Stelle x :



Steigung $= \frac{a}{b} = f'(x)$

wird konstruiert durch



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

↪ An der Uni wird gerne auch die folgende Notation benutzt

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \quad \text{angelehnt an} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

„infinitesimal"

Beispiele : $\underbrace{f(x) = 1,\ x^n,\ \frac{1}{x},\ \sqrt{x}}_{x^a \text{ mit } a = 0,\, n,\, -1,\, \frac{1}{2}},\ e^x,\ \ln x,\ \sin x, \dots$

Regel für Linearkombinationen von Funktionen:

$$y(x) = a\, f(x) + b\, g(x) \quad , \quad a,b \text{ konstant}$$

$$\frac{1}{\Delta x}\left[y(x+\Delta x) - y(x)\right] = \frac{1}{\Delta x}\Big[a\, f(x+\Delta x) + b\, g(x+\Delta x) - a\, f(x) - b\, g(x)\Big]$$

$$= a\,\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + b\,\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$\xRightarrow{\lim\limits_{\Delta x \to 0}} \quad y'(x) = a\, f'(x) + b\, g'(x)$$

Terme einer Summe können separat differenziert werden.

↳ 1 $\quad f(x) = x^n \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

Benötige: $\dfrac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$

$$(x+\Delta x)^n = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} x^n \Delta x^0 + \underbrace{\binom{n}{1}}_{n} x^{n-1} \Delta x^1 + \underbrace{\binom{n}{2} x^{n-2} \Delta x^2 + \ldots}$$

$$= x^n + n\, x^{n-1} \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\Delta x}\left[(x+\Delta x)^n - x^n\right] = \frac{1}{\Delta x}\left[n\, x^{n-1} \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^2)\right]$$

$$= n\, x^{n-1} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

$$\xrightarrow{\Delta x \to 0} n\, x^{n-1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dx} x^n = n\, x^{n-1}}$$

Ableitungsoperator

② $$\exp(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots$$

$$\Rightarrow \exp'(x) = 0 + 1 + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} x + \frac{1}{\cancel{3} \cdot 2!} \cancel{3} x^2 + \frac{1}{\cancel{4} \cdot 3!} \cancel{4} x^3 + \dots$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \dots$$

$$= \exp(x) = e^x$$

③ $$f(x) = \ln x$$

$$\Rightarrow f(x+\Delta x) - f(x) = \ln(x+\Delta x) - \ln(x)$$

$$= \ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

↳ Für Limes $\Delta x \longrightarrow 0$ setze $\Delta x = \frac{x}{n}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{n}$

und bilde zum Schluß $n \longrightarrow \infty$

$$\Rightarrow \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{n}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

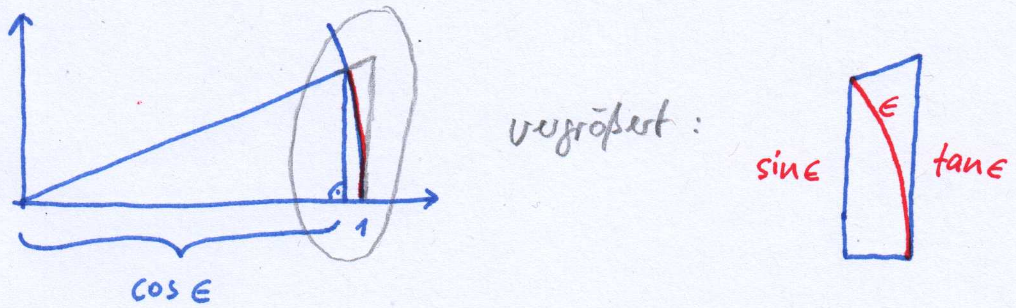
$$= \frac{1}{x} \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$$

↳ Nun ist $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ und $\ln(e) = 1$

$$\Rightarrow \boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$$

④ Winkelfunktionen $\quad f(x) = \sin x \quad , \quad \Delta x = \epsilon > 0$

$$f(x+\epsilon) = \sin(x+\epsilon) = \sin x \underbrace{\cos\epsilon}_{\approx 1} + \cos x \underbrace{\sin\epsilon}_{\approx ?}$$



$$\Rightarrow \quad \sin\epsilon \leq \epsilon \leq \tan\epsilon = \frac{\sin\epsilon}{\cos\epsilon} \qquad \Big| : \sin\epsilon$$

$$\Rightarrow \quad 1 \leq \frac{\epsilon}{\sin\epsilon} \leq \frac{1}{\cos\epsilon} \qquad \Big| : (\ldots)^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad 1 \geq \frac{\sin\epsilon}{\epsilon} \geq \cos\epsilon$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\sin\epsilon}{\epsilon} = 1$$

: Für sehr kleine $\epsilon \ll 1$ gilt :

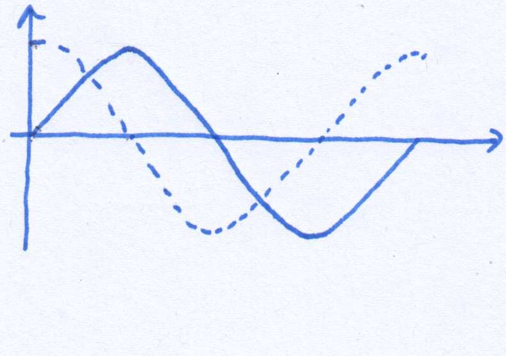
$$\boxed{\cos\epsilon \approx 1 \quad , \quad \sin\epsilon \approx \epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Also : $\quad f(x+\epsilon) \approx \sin x + \epsilon \cos x$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} \approx \frac{1}{\epsilon}\left[\cancel{\sin x} + \epsilon\cos x - \cancel{\sin x}\right] = \cos x$$

Genauso $\quad \frac{1}{\epsilon}\left[\cos(x+\epsilon) - \cos x\right] = \frac{1}{\epsilon}\left[\cancel{\cos x}\underbrace{\cos\epsilon}_{\approx 1} - \sin x \underbrace{\sin\epsilon}_{\approx\epsilon} - \cancel{\cos x}\right]$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin' x &= \cos x \\ \cos' x &= -\sin x \end{aligned}}$$



<u>Produktregel:</u> Sei $y(x) = f(x)\,g(x)$. Dann ist

$$y'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

Denn: $y(x+\epsilon) - y(x) = f(x+\epsilon)\,g(x+\epsilon) - f(x)\,g(x)$

Null geschickt addiert: $- f(x)\,g(x+\epsilon) + f(x)\,g(x+\epsilon)$

$$= \left[f(x+\epsilon) - f(x)\right] g(x+\epsilon) + f(x)\left[g(x+\epsilon) - g(x)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\epsilon}\left[y(x+\epsilon) - y(x)\right] = \underbrace{\frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}}_{f'(x)}\,\underbrace{g(x+\epsilon)}_{g(x)} + \underbrace{f(x)}_{f(x)}\,\underbrace{\frac{g(x+\epsilon) - g(x)}{\epsilon}}_{g'(x)}$$

$$\xrightarrow{\epsilon \to 0} f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

z.B. $\frac{d}{dx}\,\underbrace{x}_{f}\,\underbrace{\sin x}_{g} = 1 \cdot \sin x + x\,(\cos x) = \sin x + x \cos x$

<u>Kettenregel:</u> Sei $y(x) = f(g(x))$. Dann ist

$y'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$ „Äußere mal innere Abl."

Diesmal addieren wir keine Null, sondern multiplizieren geschickt mit $1 = \frac{\Delta g}{\Delta g}$

Hier definieren wir $\Delta g = g(x+\Delta x) - g(x)$

$$\Leftrightarrow \quad g(x+\Delta x) = g(x) + \Delta g$$

$$\Delta y = f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))$$

$$= f(g(x) + \Delta g) - f(g(x)) \quad = \Delta f$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(g(x)+\Delta g) - f(g(x))}{\Delta x} \cdot \underbrace{\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta g}}_{\text{mit 1 multipliziert.}}$$

$$= \underbrace{\frac{f(g(x)+\Delta g) - f(g(x))}{\Delta g}}_{\longrightarrow f'(g(x))} \cdot \underbrace{\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}_{\longrightarrow g'(x)}$$

weil im Grenzfall $\Delta x \to 0$ auch $\Delta g \to 0$ geht.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dg} \, \frac{dg}{dx} \, .$$

(5) Nun können wir schnell nachholen:

$f(x) = x^a$ mit $a \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad f(x) = x^a = e^{\ln(x^a)} = e^{a \ln x} = \exp(a \ln x)$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \underbrace{\exp'(a \ln x)}_{\underbrace{\exp(a \ln x)}_{x^a}} \cdot a \underbrace{\ln' x}_{\frac{1}{x}}$$

$$= a \, x^a \, x^{-1} = a \, x^{a-1} \quad //$$

Dies beinhaltet

- $\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$ mit $n \in \mathbb{N}$
- $\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{d}{dx} x^{1/2} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$
- $\frac{d}{dx} \frac{1}{x} = \frac{d}{dx} x^{-1} = (-1)\, x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

etc.

<u>Quotientenregel (?)</u> Sei $y(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $y'(x) = ?$

$$\Rightarrow \quad y(x) = f(x) \cdot \left[g(x)\right]^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad y'(x) = f'(x) \cdot \left[g(x)\right]^{-1} + f(x) \underbrace{(-1)\left[g(x)\right]^{-2}}_{\text{äußere Abl.}} \underbrace{g'(x)}_{\text{innere Abl.}}$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)\, g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

z.B. $\quad y(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\Rightarrow \quad y'(x) = \tan' x = \frac{\cos x \cos x - \sin x\, (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

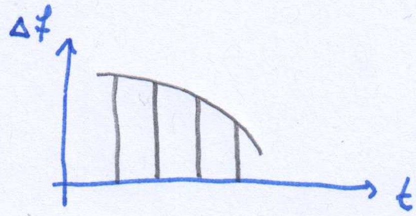
$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

Höhere Ableitungen sind auch von Bedeutung:

z.B. „Die Abnahme der Neuverschuldung beschleunigt sich"

$f(t)$: Schulden

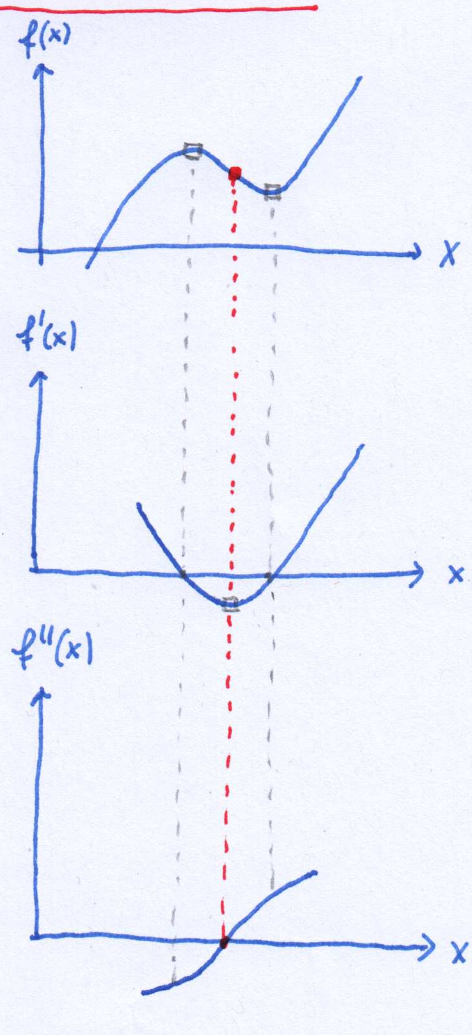
$\Delta f = f(t+\Delta t) - f(t) \approx f'(t)\,\Delta t$ Neuverschuldung pro Jahr



$f''(t) < 0$: nimmt ab

$f'''(t) < 0$: und zwar immer schneller.

Kurvendiskussion



lokale Extrema von f : $f' = 0$

lokales Maximum : $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$

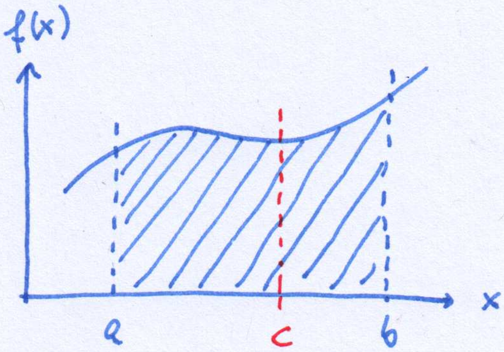
lokales Minimum : $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$

Sattelpunkt : $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$ und kein Vorzeichenwechsel von f'

Wendepunkt : $f''(x) = 0$

(Lenkrad in Nullstellung)

Integralrechnung

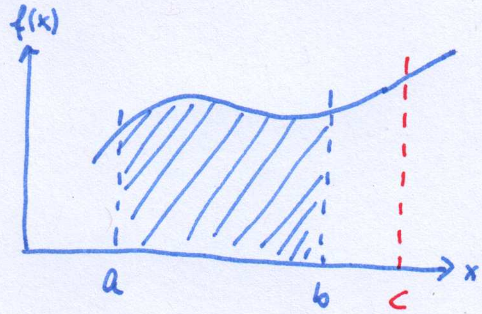


$\int_a^b f(x)\,dx$ ist die „Fläche unter dem Graphen"

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

fällt raus

Aber auch:



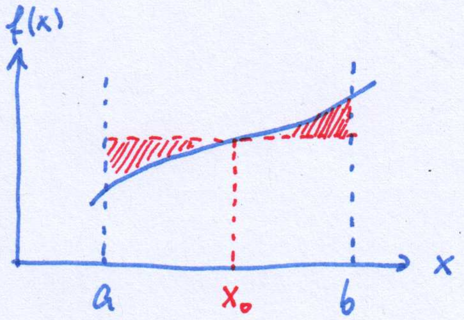
$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_c^b f(x)\,dx = - \int_b^c f(x)\,dx$$

Grenzvertauschung gibt Vorzeichenwechsel

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $f(x)$ stetig auf $[a,b]$



Es existiert $(\exists)$ $x_0 \in [a,b]$

mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{(b-a)\,f(x_0)}_{\text{Rechteckfläche.}}$$

Man definiert das „unbestimmte" Integral

$$F(x) = \int_q^x \underbrace{f(y)}_{\text{Integrand}}\,dy$$

F : „Stammfunktion" von f

Hauptsatz der Integralrechnung: $\boxed{F'(x) = f(x)}$

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left[\int_q^{x+\Delta x} f(y)\,dy - \int_q^x f(y)\,dy\right]$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\left[\int_q^{x+\Delta x} f(y)\,dy + \int_x^q f(y)\,dy\right]$$

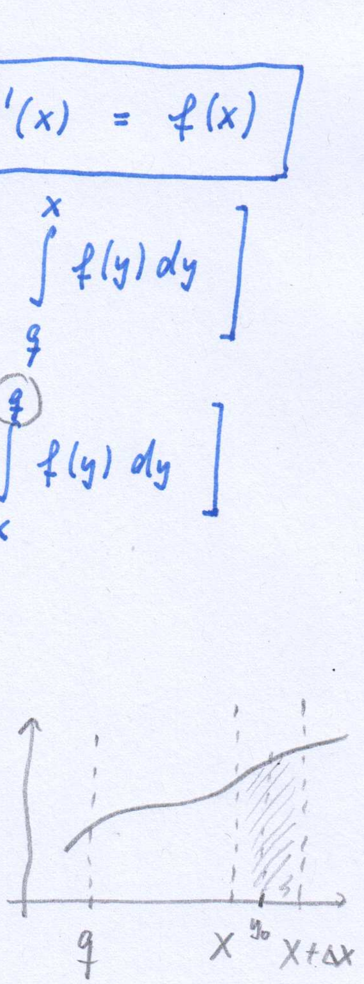
$$= \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(y)\,dy$$

Mittelwertsatz:

$\exists\, y_0 \in [x, x+\Delta x]$

$$= \frac{1}{\cancel{\Delta x}}\,\cancel{\Delta x}\cdot f(y_0)$$

$$\xrightarrow{\Delta x \to 0} f(x)$$



Eine Stammfunktion ist nur bis auf eine additive Konstante eindeutig, denn

$$\frac{d}{dx}\left[F(x)+c\right] = F'(x) + 0 = f(x)$$

d.h. $F(x)+c$ ist auch eine Stammfunktion.

<u>Beispiele:</u>

$f(x)$	$F(x)$
e^{kx}	$\frac{1}{k}e^{kx}$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\sin x$	$-\cos x$

Dann ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_q^b f(x)\,dx}_{F(b)} - \underbrace{\int_q^a f(x)\,dx}_{F(a)}$$

$$= F(b) - F(a) = \left(F(b)+c\right) - \left(F(a)+c\right)$$

$$= \left[F(x)\right]_a^b = F(x)\Big|_a^b$$

Handwerkszeug:

↳ Aus der Produktregel $(fg)' = f'g + fg' \quad \Big| \int(\dots)$

Sei $y(x) = f(x)g(x)$. $\Rightarrow y'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$$\Rightarrow \int_a^b \left(f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \right) dx = \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

$$= \int_a^b y'(x)\,dx = y(x)\Big|_a^b = f(x)g(x)\Big|_a^b$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{„Partielle Integration":} \quad \int_a^b f'(x)g(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx}$$

Beispiel: $f(x) = x \qquad g(x) = \ln x$

$f'(x) = 1 \qquad g'(x) = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \int_a^b \ln x\,dx = x \ln x\Big|_a^b - \underbrace{\int_a^b \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\,dx}_{x\big|_a^b}$$

$$= \left[x \ln x - x \right]_a^b$$

Test: $\frac{d}{dx}\left[x \ln x - x \right] = \ln x + \underbrace{\cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} - 1}_{0} = \ln x$ ✓ ☺

$\hookrightarrow$ <u>Variablensubstitution</u>

Beispiel : $\quad I = \int_a^b x \cos(x^2)\, dx$

Idee: anstelle von $x = a..b$ zu integrieren, wollen wir über $y = x^2 = a^2..b^2$ integrieren, d.h.

$$x = \sqrt{y} = y^{1/2} \implies \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{y}} .$$

aufgelöst : $\quad dx = \frac{1}{2\sqrt{y}}\, dy \qquad$ Genial !

$$\implies I = \int_{a^2}^{b^2} \cancel{\sqrt{y}} \cos(y) \frac{1}{2\cancel{\sqrt{y}}}\, dy = \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} \cos(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{2} \sin(y) \Big|_{a^2}^{b^2} = \frac{\sin(b^2) - \sin(a^2)}{2}$$

D.h. die Stammfunktion von $x \cos(x^2)$ läßt sich finden, indem wir zum Schluß die Substitution rückgängig machen:

$$\underline{I} = \frac{1}{2} \sin(y) \Big|_{a^2}^{b^2} = \underbrace{\frac{1}{2} \sin(x^2)}_{F(x)} \Big|_a^b$$

$$\implies F'(x) = \frac{1}{\cancel{2}} \cos(x^2) \cdot \cancel{2}x \quad \checkmark$$

Allgemein wollen wir $x = g(y)$ substituieren,

mit Umkehrfunktion $g^{-1}(x) = y = g^{-1}(a) \,..\, g^{-1}(b)$

und $\dfrac{dx}{dy} = g'(y) \implies dx = g'(y)\,dy$

$$\implies \int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(y))\,g'(y)\,dy$$

Stammfunktion von rationalen Funktionen mithilfe der „Partialbruchzerlegen"

Was ist eine Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 4} \quad ?$$

1. Schritt : Schriftliche Division !

$$(x^3 - x^2 + x - 1) : (x^2 - 4) = x - 1 + \frac{5x - 5}{x^2 - 4}$$

$$\begin{array}{l} -(x^3 \qquad - 4x) \\ \hline \quad -x^2 + 5x - 1 \\ \quad -(-x^2 \qquad + 4) \\ \hline \qquad 5x - 5 \end{array}$$

$$\implies f(x) = x - 1 + \frac{5x - 5}{x^2 - 4}$$

2. Schritt : Partialbruchzerlegung

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

Löse $\dfrac{5x-5}{x^2-4} = \dfrac{5x-5}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{x+2}$

$$\Longrightarrow \quad \frac{5x-5}{x^2-4} = \frac{a(x+2) + b(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{\overbrace{(a+b)}^{5}x + 2\overbrace{(a-b)}^{-5}}{x^2-4}$$

$$\Longrightarrow \quad \left.\begin{aligned} a + b &= 5 \\ 2a - 2b &= -5 \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Cramersche Regel :

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}}{-2-2} = \frac{-10+5}{-4} = \frac{5}{4}$$

$$b = \frac{1}{-4} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = \frac{1}{-4}(-5-10) = \frac{15}{4}$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) = x - 1 + \frac{5}{4}\,\frac{1}{x-2} + \frac{15}{4}\,\frac{1}{x+2}$$

3. Schritt : Stammfunktion

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{4}\ln(|x-2|) + \frac{15}{4}\ln(|x+2|)$$