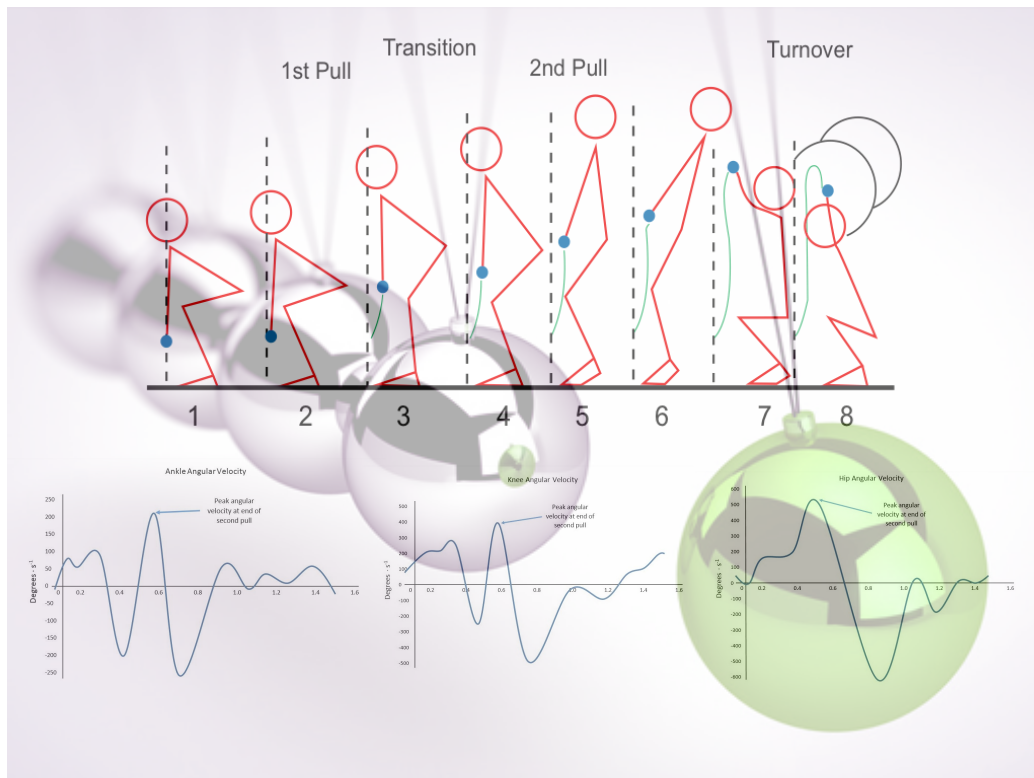


Theoretische Physik 2

Mechanik

Wintersemester 2022/23



Per Aspera ad Astra

Alexander Lenz

Universität Siegen

9. Februar 2023

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	9
1	Theoretische Mechanik - Überblick	12
1.1	Klassische Newtonsche Mechanik - Wiederholung	12
1.1.1	Beispiel 1: Der Wurf	13
1.1.2	Beispiel 2: Bewegung mit Reibung	14
1.2	Allgemeinere Überlegungen	17
1.2.1	Newtonsche Axiome (1687)	17
1.2.2	Impuls und Kraft	20
1.2.3	Fundamentale Kräfte	21
2	Eindimensionale Probleme	24
2.1	Erhaltungssätze I	24
2.2	Eindimensionale Probleme	25
2.2.1	Schwingungsdauer	25
2.2.2	Beispiel 1: Mathematisches Pendel	26
2.2.3	Beispiel 2: Potential der Form $U(x) = A x ^n$	29
2.3	Das Prinzip der kleinsten Wirkung	31
2.3.1	Die Wirkung	31
2.3.2	Teilchen im konstanten Gravitationsfeld	32
2.3.3	Freies Teilchen	36
3	Das Zweikörperproblem I	38
3.1	Schwerpunkt und Relativbewegung	38
3.2	Numerische Lösung	39
3.3	Analytische Lösung	43
3.3.1	Zentralkräfte	43
3.3.2	Effektives Potential	45
4	Kepler-Gesetze, Erhaltungssätze	48
4.1	Fortsetzung Kepler-Problem	48
4.1.1	Effektives Potential	48
4.1.2	Allgemeine Lösung des Zweikörperproblems	50
4.1.3	Lösung des Kepler-Problems	51

5	Kepler-Gesetze II	54
5.1	Ellipsengleichung	54
5.2	Zwei-Körper-Bewegungen	56
5.3	Kepler-Gesetze	58
5.3.1	Erstes Keplersches Gesetz:	58
5.3.2	Zweites Keplersches Gesetz:	58
5.3.3	Drittes Keplersches Gesetz:	59
5.4	Laplace-Lenz-Runge-Vektor	59
5.5	Ausblick auf das Dreikörperproblem	61
6	Erhaltungssätze für Mehrteilchensysteme	64
6.1	Zweiteilchensystem	64
6.1.1	Koordinaten	64
6.1.2	Impulse	64
6.1.3	Kinetische Energie	65
6.1.4	Drehimpuls	65
6.2	Vielteilchensystem	66
6.3	Schwerpunkt	66
6.4	Drehimpulserhaltung	67
6.5	Energieerhaltung	68
6.6	Galilei-Transformationen	69
7	Einschub: Gruppentheorie	72
7.1	Galilei-Gruppe	72
7.2	Definition: Gruppe	72
7.3	Orthogonale Gruppe - Rotationsgruppe	73
7.4	Unitäre Gruppe	74
7.5	Darstellungen einer Gruppe	75
7.6	Lie-Algebra und Lie-Gruppen	76
7.7	$su(2)$ Lie-Algebra	77
7.8	Verallgemeinerung: $SU(N)$ und $su(N)$ Lie-Algebra	79
7.9	Galilei-Invarianz	81
8	Phasenraum I	82
8.1	Phasenraum bei eindimensionaler Bewegung	82
8.2	Harmonischer Oszillator	83
8.3	Pendel im Schwerfeld	86

9	Phasenraum II und lineare Systeme	89
9.1	Phasenraum bei n Teilchen	89
9.2	Lineare Systeme	92
9.2.1	Homogene Systeme	92
10	Lineare Systeme	94
10.1	Inomogene Systeme	94
10.2	Wdh.: freie Schwingung	95
10.3	Erzwungene Schwingung I	96
10.3.1	Allgemeine Lösung	96
10.3.2	Resonanzfall	97
10.3.3	Verhalten in der Nähe der Resonanz	98
11	Lineare Systeme	101
11.1	Erzwungene Schwingung II	101
11.2	Gedämpfte Schwingung	102
11.3	Erzwungene Schwingung mit Reibung	106
11.4	Einschub: Konservative Kraftfelder	108
12	d'Alembert-Prinzip	110
12.1	Zwangsbedingungen und verallgemeinerte Koordinaten	110
12.1.1	Definition von Zwangsbedingungen	110
12.1.2	Generalisierte Koordinaten	115
12.2	d'Alembertsches Prinzip	116
12.2.1	Virtuelle Verrückungen	116
12.2.2	Statischer Fall	116
12.2.3	Dynamischer Fall	117
12.3	Lagrange Gleichungen	120
13	Lagrange 1	121
13.1	Euler-Lagrange-Gleichungen	121
13.2	Beispiele	122
13.3	Variationsprinzipien	127
13.4	Hamiltonsches Extremalprinzip	129
13.5	Beispiele	131
13.5.1	1 dimensionale Bewegung	131
13.5.2	n -Teilchensystem	131

13.5.3	Geladenes Teilchen in elektrischen und magnetischen Feldern	132
14	Lagrange 2	134
14.1	Nichteindeutigkeit der Lagrange-Funktion	134
14.2	Eichtransformationen an der Lagrange-Funktion	135
14.3	Transformation der verallgemeinerten Koordinaten	136
14.4	Hamilton-Funktion	137
15	Hamilton-Funktion	138
15.1	Hamilton-Funktion	138
15.2	Legendre-Transformation (eine Variable)	140
15.3	Legendre-Transformation (mehrere Variablen)	142
15.4	Kanonische Systeme	143
16	Kanonische Systeme	145
16.1	Kanonische Systeme	145
16.2	Beispiele	146
16.2.1	Teilchen im Zentralfeld	146
16.2.2	Teilchen im Elektromagnetischen Feld	147
17	Noether-Theorem	149
17.1	Noether-Theorem	149
18	Noether-Theorem II	155
18.1	Symmetrien und Erhaltungssätze	155
18.2	Noether-Theorem II	156
18.3	Drehungen	157
18.4	Kanonische Transformationen	159
19	Wiederholung und Poisson	160
19.1	Wiederholung	160
19.2	Variationsprinzipien auf Hamilton-Funktion	163
19.3	Poisson-Klammern	163
19.4	Axiomatische Formulierung der Mechanik	164
19.5	Spezielle Poisson-Klammern	165
19.6	Übergang zur Quantenmechanik	166

20 Poisson II, Routhsche Funktion und kanonische Transformationen	168
20.1 Anwendungen der Poisson-Klammern	168
20.1.1 Äquivalenz zu den Newtonschen Gleichungen	168
20.1.2 Drehimpulse	168
20.2 Routhsche Funktion	170
20.3 Kanonische Transformationen	171
21 Kanonische Transformationen II und Hamilton-Jacobi-Theorie	176
21.1 Kanonische Transformationen	176
21.2 Hamilton-Jacobi-Theorie	179
21.3 Bedeutung der Erzeugenden	181
21.4 Beispiel zur Hamilton-Jacobi-Theorie	181
22 Liouville-Theorem	184
22.1 Struktur der kanonischen Gleichungen	184
22.2 Lineares System in einer Dimension	184
22.3 Liouville-Theorem	187
22.3.1 Wiederholung:	187
22.3.2 Fluß und Divergenz	187
22.3.3 Phasenraumfluss:	188
23 Starrer Körper 1	190
23.1 Schwerpunkt	190
23.2 Drehimpuls	191
23.3 Kinetische Energie	192
23.4 Beispiel: Axtwurf	192
23.5 Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung	193
23.6 Rotationsenergie bei Drehung um feste Achse	196
23.7 Drehimpuls bei Drehung um feste Achse	197
23.8 Satz von Steiner	197
23.9 Berechnung von Trägheitsmomenten	199
24 Starrer Körper 2	205
24.1 Lineare Bewegung und Rotation	205
24.2 Kinetische Energie - Trägheitstensor	207
24.3 Drehimpuls	210

25 Starrer Körper 3	212
25.1 Schwerpunktsatz	212
25.2 Drehimpulssatz	213
25.3 Drehimpulssatz relativ zum Schwerpunkt	213
25.4 Die Eulerschen Gleichungen	214
25.5 Eulerwinkel	215
25.5.1 ChatGPD about Eulerwinkel	217
26 Starrer Körper 4	218
26.1 Winkelgeschwindigkeit	218
26.2 Stabilität der Euler-Gleichungen	219
26.2.1 Konstante Winkelgeschwindigkeit	220
26.2.2 Stabilität der Lösung	220
26.3 Kräftefreier symmetrischer Kreisel	222

0 Einleitung

Klassische Mechanik ist auf der einen Seite das scheinbar einfachste und elementarste Gebiet der Physik. Auf der anderen Seite enthält dieses Gebiet aber viele Überraschungen und Bezüge zu aktuellen Forschungsthemen, siehe z.B.:

- Ungelöste Probleme, wie das 3-Körper-Problem (vgl. Trisolaris-Trilogie von Cixin Liu [Cix17]).
- Nicht-deterministische Aspekte - Chaos.
- Abstrakter Formalismus der Mechanik in Analogie zur Quantenmechanik und sogar Quantenfeldtheorie.

Der Syllabus dieser Vorlesung ist im Modulhandbuch wie folgt angegeben:

- Newtonsche Axiome
- Koordinatensysteme, Transformationen, Zwangsbedingungen
- Lagrange-Formalismus, Hamiltonsches Prinzip
- Erhaltungssätze, Noether-Theorem
- Zweikörperproblem
- Rotierende Bezugssysteme, starre Körper
- Systeme von Massenpunkten, kleine Schwingungen
- Hamilton-Formalismus, kanonische Transformationen, Poisson-Klammern
- Hamilton-Jacobi-Theorie
- Spezielle Relativitätstheorie

Theoretische Physik macht sehr von fortgeschrittenen mathematischen Methoden Gebrauch. Für diese Vorlesung sind die Standard-Mathematikurse in Siegen Voraussetzung: Mathematischer Vorkurs, Mathematische Ergänzungen, Analysis, Lineare Algebra, TP1

Der Kurs Theoretische Physik 1 (TP1) zielt speziell darauf ab die mathematischen Voraussetzungen für die verschiedenen Theorie Vorlesungen zu liefern.

Literaturempfehlungen: Für die Theoretische Mechanik gibt es eine sehr umfangreiche Literatur. Zusätzlich zur Vorlesung können folgende Bücher empfohlen werden:

1. L. Susskind, G. Hrabovsky — Basic Book New York
The theoretical Minimum - Classical Physics
Crash-kurs in den meisten der behandelten Themen.
2. F. Scheck — Springer
Theoretische Physik 1 - Mechanik
Etwas formaler als die Vorlesung.
3. L. Landau, E, Lifshitz — Akademie Verlag Berlin
Theoretische Physik 1 - Mechanik
Klassiker, knapper als die Vorlesung.
4. F. Kuypers - Wiley
Klassische Mechanik Wiley
Sehr detailliert.
5. V. I. Arnold — Springer
Mathematical Methods of Classical Mechanics
Für mathematisch Interessierte.

Ablauf:

- Dienstag 14-16 Vorlesung ENC-D 308 - 1. Termin: 11.10.2022
- Freitag 10-12 Vorlesung ENC-D 308 - 1. Termin: 14.10.2022

Parallel zur Vorlesung finden Übungen statt: Das Übungsblatt wird Dienstags in der Vorlesung ausgeteilt und muss am darauffolgenden Montag bis 12:00 mittags abgegeben werden. Am Mittwoch danach werden die Aufgaben besprochen. Es besteht die Möglichkeit eine der beiden Übungsgruppen auf Englisch zu halten.

- Montag 12:00 Übungsblattabgabe - 1. Termin: 17.10.2022
- Dienstag 14-16 Übungsblattausgabe - 1. Termin: 11.10.2022
- Mittwoch 12-14 Übung ENC-D 120 - 1. Termin: 19.10.2022
- Donnerstags 12-14 Übung ENC-D 201 - 1. Termin: 20.10.2022

Übungsgruppenleiter: Dr. Aleksey Rusov, Dr. Maria Laura Piscopo

1 Theoretische Mechanik - Überblick

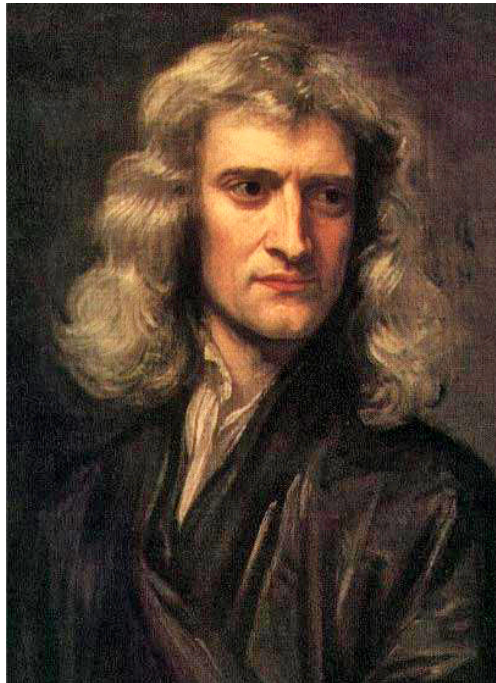
1. Vorlesung: Dienstag 11.10.2022

1.1 Klassische Newtonsche Mechanik - Wiederholung

Zunächst untersuchen wir einzelne Massenpunkte mit nicht-relativistischen Energien, d.h. $v \ll c = 299792,458$ km/s. Später werden wir dies auf Mehrteilchensysteme und auf relativistische Energien erweitern. In einem Jahr werden auch quantenmechanische Effekte hinzugenommen!

Newton: [Whi97] Kraft auf einen Körper ist gleich Masse mal Beschleunigung.

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{x}}}. \quad (1)$$

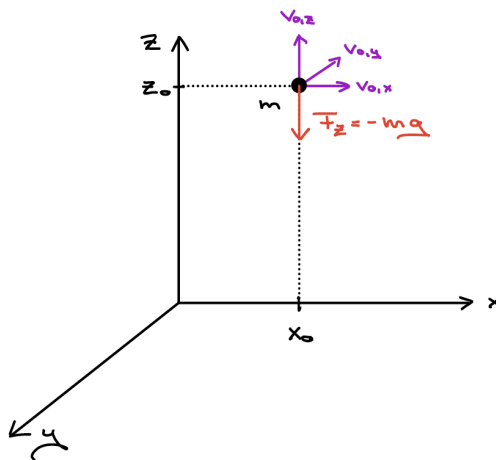


Isaac Newton (1642 - 1727)

1.1.1 Beispiel 1: Der Wurf

Der Wurf im konstanten Gravitationsfeld der Erde:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0,x} \\ v_{0,y} \\ v_{0,z} \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$



Lösung:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{x}} &= \frac{\vec{F}}{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}, \\ \vec{v} = \dot{\vec{x}} &= \int_{t_0}^t \ddot{\vec{x}} dt' = \begin{pmatrix} v_{0,x} \\ v_{0,y} \\ v_{0,z} - g(t - t_0) \end{pmatrix}, \\ \vec{x} &= \int_{t_0}^t \dot{\vec{x}} dt' = \begin{pmatrix} x_0 + v_{0,x}(t - t_0) \\ y_0 + v_{0,y}(t - t_0) \\ z_0 + v_{0,z}(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3)$$

Parametrische Lösung:

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \frac{x - x_0}{v_{0,x}} \\ \Rightarrow z &= \frac{v_{0,z}}{v_{0,x}}(x - x_0) - \frac{g}{2v_{0,x}^2}(x - x_0)^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Die Bahnkurve ist also eine klassische Parabel.

Übungsaufgabe 1: Kugelstossen

<https://arxiv.org/pdf/1007.3689.pdf>

1.1.2 Beispiel 2: Bewegung mit Reibung

Flug einer Kugel, eines Balles,... unter Berücksichtigung der Luftreibung.

Bewegt sich ein Objekt mit der Querschnittsfläche A und der Geometrie c_W mit der Geschwindigkeit v durch ein Medium (z.B. Luft) mit der Dichte ρ dann kann die Reibungskraft durch folgende Gleichung beschrieben werden.

$$F_{LR} = -\frac{1}{2}c_W A \rho v^2, \quad (5)$$

wobei die Kraft der Bewegungsrichtung entgegen gerichtet ist.

Lösung:

Für die Bewegung eines Objekts im Schwerfeld der Erde gilt dann bei Berücksichtigung der Luftreibung

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -\text{sign}(v_x)\frac{1}{2}c_W A \rho v_x^2 \\ -\text{sign}(v_y)\frac{1}{2}c_W A \rho v_y^2 \\ -\text{sign}(v_z)\frac{1}{2}c_W A \rho v_z^2 - mg \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0,x} \\ v_{0,y} \\ v_{0,z} \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Für die Bewegung in x - und y -Richtung gilt

$$\begin{aligned}
m\dot{v}_x &= -\text{sign}(v_x)\frac{1}{2}c_w A\rho v_x^2, \\
\frac{dv_x}{dt} &= -\text{sign}(v_x)\frac{c_w A\rho}{2m}v_x^2 =: -\alpha v_x^2, \\
\frac{dv_x}{v_x^2} &= -\alpha dt, \\
\int_{v_{0,x}}^{v_x} \frac{dv'_x}{v'^2_x} &= -\alpha \int_{t_0}^t dt', \\
\left[-\frac{1}{v'_x}\right]_{v_{0,x}}^{v_x} &= -\alpha(t-t_0), \\
v_x &= \frac{v_{0,x}}{1 + \alpha v_{0,x}(t-t_0)}. \tag{7}
\end{aligned}$$

Für $t = t_0$ ergibt sich $v_x = v_{x,0}$ und für $t \rightarrow \infty$ ergibt sich $v_x = 0$.
Für die Koordinate x erhalten wir schliesslich

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{v_{0,x}}{1 + \alpha v_{0,x}(t-t_0)}, \\
\int_{x_0}^x dx' &= \int_{t_0}^t \frac{v_{0,x} dt'}{1 + \alpha v_{0,x}(t'-t_0)}. \tag{8}
\end{aligned}$$

Nun substitutionieren wir $u = 1 + \alpha v_{0,x}(t' - t_0)$ und erhalten

$$x - x_0 = \frac{1}{\alpha} \int_{u_0}^u \frac{du'}{u'} = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{u}{u_0} = \frac{1}{\alpha} \ln [1 + \alpha v_{0,x}(t - t_0)]. \tag{9}$$

v_y und y werden analog bestimmt.

Für die Bewegung in z -Richtung gilt

$$m\dot{v}_z = -mg - \text{sign}(v_z)\frac{1}{2}c_w A\rho v_z^2. \tag{10}$$

Für den Fall $v_z < 0$, d.h. eine nach unten gerichtete Bewegung, gibt es hier eine Endgeschwindigkeit v_∞ , wenn $\dot{v}_z = 0$.

$$\begin{aligned}
0 &= -g + \frac{c_w A\rho}{2m}v_\infty^2, \\
v_\infty^2 &= \frac{2mg}{c_w A\rho}. \tag{11}
\end{aligned}$$

Damit lautet die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned}
m\dot{v}_z &= -mg + mg\frac{v_z^2}{v_\infty^2}, \\
\frac{dv_z}{dt} &= \frac{g}{v_\infty^2} (v_z^2 - v_\infty^2), \\
\frac{dv_z}{v_z^2 - v_\infty^2} &= \frac{1}{2v_\infty} \left[\frac{dv_z}{v_z - v_\infty} - \frac{dv_z}{v_z + v_\infty} \right] = \frac{g}{v_\infty^2} dt, \\
\int_{v_{0,z}}^{v_z} \frac{dv'_z}{v'_z - v_\infty} - \int_{v_{0,z}}^{v_z} \frac{dv'_z}{v'_z + v_\infty} &= \frac{2g}{v_\infty} \int_{t_0}^t dt'. \tag{12}
\end{aligned}$$

Betrachten wir den Fall $v_z < v_\infty$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{v_{0,z}}^{v_z} \frac{dv'_z}{v_\infty - v'_z} + \int_{v_{0,z}}^{v_z} \frac{dv'_z}{v_\infty + v'_z} &= -\frac{2g}{v_\infty} \int_{t_0}^t dt', \\
[-\ln(v_\infty - v'_z)]_{v_{0,z}}^{v_z} + [\ln(v_\infty + v'_z)]_{v_{0,z}}^{v_z} &= -\frac{2g}{v_\infty} (t - t_0), \\
\ln \frac{(v_\infty - v_{0,z})(v_\infty + v_z)}{(v_\infty + v_{0,z})(v_\infty - v_z)} &= -\frac{2g}{v_\infty} (t - t_0). \tag{13}
\end{aligned}$$

Um diesen Ausdruck weiter zu vereinfachen, betrachten wir nun den Fall $v_{0,z} = 0 = t_0$. Damit vereinfacht sich unsere Gleichung zu

$$\begin{aligned}
\ln \frac{v_\infty + v_z}{v_\infty - v_z} &= -\frac{2g}{v_\infty} t, \\
\frac{v_\infty + v_z}{v_\infty - v_z} &= e^{-\frac{2g}{v_\infty} t}, \\
v_\infty + v_z &= (v_\infty - v_z) e^{-\frac{2g}{v_\infty} t}, \\
v_z \left(1 + e^{-\frac{2g}{v_\infty} t} \right) &= v_\infty \left(e^{-\frac{2g}{v_\infty} t} - 1 \right), \\
v_z \left(e^{+\frac{g}{v_\infty} t} + e^{-\frac{g}{v_\infty} t} \right) &= v_\infty \left(e^{-\frac{g}{v_\infty} t} - e^{+\frac{g}{v_\infty} t} \right), \\
v_z &= v_\infty \frac{e^{-\frac{g}{v_\infty} t} - e^{+\frac{g}{v_\infty} t}}{e^{-\frac{g}{v_\infty} t} + e^{+\frac{g}{v_\infty} t}}, \\
v_z &= v_\infty \tanh \left(-\frac{g}{v_\infty} t \right). \tag{14}
\end{aligned}$$

Bestimme $z!$

$$\int \tanh(t') dt' = \ln [\cosh(t)] \quad (15)$$

Parametrische Lösung:

Das Einsetzen von

$$t - t_0 = \frac{e^{\alpha(x-x_0)} - 1}{\alpha v_{0,x}} \quad (16)$$

ergibt leider keine einfache analytische Gleichung.

Übungsaufgabe 2: Raketengleichung

1.2 Allgemeinere Überlegungen

1.2.1 Newtonsche Axiome (1687)

Mathematical principles of natural philosophy [BC99]:

1. Jeder **Körper** verharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen **Bewegung**, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern.
2. Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.
3. Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich \equiv die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.

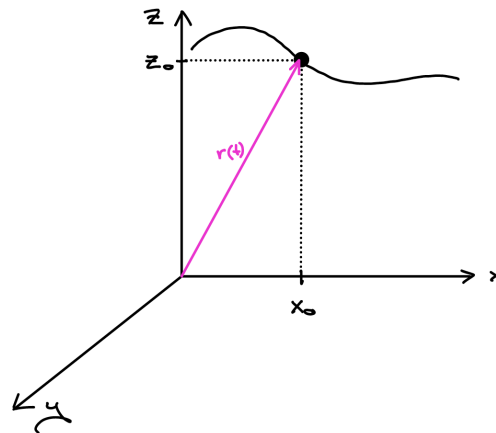
Definitionen:

- **Körper** = Massenpunkt = punktförmiges (d.h. keine Ausdehnung) Teilchen der Masse m .
Später werden wir zeigen:
 - Beliebige Massenverteilung (Gesamtmasse M) bewegt sich wie eine Punktmasse M im Schwerpunkt der Massenverteilung.

- Kugelsymmetrische Massenverteilung (Gesamtmasse M) erzeugt ein Gravitationsfeld wie eine Punktmasse M im Schwerpunkt der Massenverteilung.

- **Bewegung, Bewegungszustand** \equiv Bahnkurve $\vec{r}(t)$ des Massenpunktes.

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3, \\ t &\mapsto \vec{r}(t), \end{aligned} \quad (17)$$



- Zustand der Ruhe: $\vec{r}(t) = 0$ - von Bezugssystem abhängig!
- Erfahrung zeigt: Raum ist homogen und isotrop, nicht gekrümmt, es gibt keinen ausgezeichneten Punkt \Rightarrow euklidischer Raum \mathbb{E}^3 (affiner Raum).
Absoluter Wert $\vec{r}(t) \in \mathbb{E}^3$ sinnlos.
Relativer Wert $\vec{r}(t)$ relativ zu Punkt $\vec{s}(t)$ sinnvoll.
Affiner Raum + Ursprung (durch Beobachter gegeben) \equiv reller Vektorraum \mathbb{R}^3 .

- **Koordinaten:** (siehe TP1, 1. Kapitel)

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad \text{kartesische Koordinaten,} \quad (18)$$

$$\vec{r}(t) = \{r(t), \theta(t), \varphi(t)\} \quad \text{Kugelkoordinaten.} \quad (19)$$

Beispiele

$$i) \vec{r}(t) = (v_{0,x}t + x_0, 0, -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0,z}t + z_0), \quad (20)$$

$$ii) \vec{r}(t) = (R \cos(\omega t + \varphi_0), R \sin(\omega t + \varphi_0), 0), \quad (21)$$

$$iii) \vec{r}(t) = \{r(t) = R, \theta(t) = 0, \varphi(t) = \omega t + \varphi_0\}. \quad (22)$$

i) beschreibt den Wurf, ii) und iii) beschreiben dieselbe kreisförmige Bewegung.

- **Geschwindigkeit und Beschleunigung:** aus der Kenntnis der Bahnkurve $\vec{r}(t)$ kann man die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ und die Beschleunigung $\vec{a}(t)$ ableiten:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t), \quad (23)$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t). \quad (24)$$

Für die obigen Beispiele ergibt sich

$$i) \vec{v}(t) = (v_{0,x}, 0, -gt + v_{0,z}), \quad (25)$$

$$ii) \vec{v}(t) = (R\omega \sin(\omega t + \varphi_0), -R\omega \cos(\omega t + \varphi_0), 0) \quad (26)$$

und

$$i) \vec{a}(t) = (v_0, 0, -g), \quad (27)$$

$$ii) \vec{a}(t) = -\omega^2(R \cos(\omega t + \varphi_0), R \sin(\omega t + \varphi_0), 0) \\ = -\omega^2 \vec{r}(t). \quad (28)$$

- **Geradlinig gleichförmige Bewegung und Inertialsysteme:** Eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit $\dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = 0$ nennt man geradlinig gleichförmige Bewegung.

Die Differentialgleichung

$$\ddot{\vec{r}} = 0 \quad (29)$$

mit den Anfangsbedingungen $\vec{r}_0 = \vec{r}(t=0)$ und $\vec{v}_0 = \vec{v}(t=0)$ hat die allgemeine Lösung

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0. \quad (30)$$

Dies ist die Aussage des 1. Newtonschen Gesetzes

Beachte: es gibt auch Bezugssysteme in denen kräftefreie Bewegungen nicht geradlinig gleichförmig sind, z.B. in rotierenden Systemen.

Definition: Bezugssysteme, in denen im kräftefreien Fall eine geradlinig gleichförmige Bewegung auftritt, heißen **Inertialsysteme**.

Satz: Sei \mathbf{K} ein Inertialsystem. Jedes relativ zu \mathbf{K} mit konstanter Geschwindigkeit \vec{w} bewegte Koordinatensystem \mathbf{K}' ist ebenfalls ein Inertialsystem.

Beweis:

Im Inertialsystem \mathbf{K} gilt für den kräftefreien Fall $\ddot{\vec{r}}(t) = 0$.

Der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ lautet in \mathbf{K}' : $\vec{r}(t)' = \vec{r}(t) - \vec{w}t$.

Damit folgt $\ddot{\vec{r}}(t)' = \ddot{\vec{r}}(t) = 0$.

QED

1.2.2 Impuls und Kraft

Den Begriff Bewegung in den Newtonschen Axiomen identifizieren wir mit dem **Impuls**:

$$\vec{p}(t) := m\dot{\vec{r}}(t), \quad (31)$$

also das Produkt aus der **trägen Masse** des Körpers und seiner Geschwindigkeit.

Damit lautet das 2. Newtonsche Gesetz

$$\frac{d}{dt}\vec{p}(t) := \vec{K}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}(t), t). \quad (32)$$

Falls die träge Masse nicht von der Zeit abhängt (d.h. im nicht-relativistischen Fall) vereinfacht sich das **2. Newtonsche Gesetz** zu

$$\boxed{m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{K}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}(t), t)}. \quad (33)$$

Bezeichnen wir in einem Mehrteilchensystem mit \vec{F}_{ik} die Kraftwirkung des i -ten Teilchens auf das k -te Teilchen, dann besagt das **3. Newtonsche Gesetz**

$$\boxed{\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}}. \quad (34)$$

Beispiele für fundamentale Kräfte sind:

1. Newtonsche Gravitationskraft einer Masse m_k auf die Masse m_i :

$$\vec{F}_{ki} = -Gm_i m_k \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|^3}. \quad (35)$$

m_i ist nun die schwere Masse der Teilchen, G die Gravitationskonstante.

$$G = (6.67430 \pm 0.00015) \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}. \quad (36)$$

siehe z.B. https://pdg.lbl.gov/2022/reviews/contents_sports.html (Google: PDG = Particle Data Group)

Beachte: Massen sind immer positiv! D.h. es gibt keine abstossende Gravitationskraft.

2. Coulombkraft einer Ladung q_k auf die Ladung q_i :

$$\vec{F}_{ki} = -\kappa_c q_i q_k \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|^3}. \quad (37)$$

q_i ist die Ladung der Teilchen, κ_c eine Konstante die von den Einheiten abhängt.

Beachte: Ladungen können sowohl positiv als auch negativ sein! D.h. es gibt auch abstossende Coulombkräfte.

1.2.3 Fundamentale Kräfte

In der Natur sind uns vier fundamentale Wechselwirkungen bekannt:

1. **Gravitation:** die Gravitation wird durch die allgemeine Relativitätstheorie beschrieben. In diesem Theorierahmen wird diese Wechselwirkung als keine eigentliche Kraft beschrieben, die durch Kräfteilchen übertragen wird. Der Grundgedanke besteht hingegen darin, dass jede Massenverteilung die Raumzeit krümmt und Testteilchen bewegen sich dann in dieser gekrümmten Raumzeit. Beschrieben wird das durch die Einsteingleichung

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (38)$$

Bei kleinen Massen und nicht-relativistischen Energie vereinfacht sich das Kraftgesetz zur Newtonschen Gravitationskraft.

Die übrigen drei fundamentalen Wechselwirkungen werden durch den Austausch von Kräfteilchen beschrieben - der theoretische Rahmen besteht hierbei in sogenannten **Quantenfeldtheorien**, was eine Verallgemeinerung der Quantenmechanik auf relativistische Energien darstellt.

2. **Elektromagnetische Wechselwirkung:** die elektromagnetische Wechselwirkung wird durch den Austausch von masselosen Photonen beschrieben. Diese Kraft ist z.B. für chemische Bindungen verantwortlich und bindet Elektronen an Atomkerne (Atomphysik). Die Quantentheorie hierzu heisst **Quantenelektrodynamik (QED)**. Für den makroskopischen Fall (keine Quanteneffekte) reduzieren sich die Kräftegleichungen auf die **Maxwell-Gleichungen**, beschränkt man sich weiter nur auf statische elektrische Ladungen, so reduziert sich die resultierende Kraft auf die Coulombkraft.
3. **Starke Wechselwirkung:** die starke Wechselwirkung wird durch den Austausch von masselosen Gluonen beschrieben. Diese Kraft ist z.B. für die Bindung von Protonen und Neutronen zu Atomkernen verantwortlich (Kernphysik) und auf einem fundamentaleren Niveau bindet sie Quarks zu Protonen und Neutronen. Die Quantentheorie hierzu heisst **Quantenchromodynamik (QCD)**. Die starke Kraft hat eine sehr kurze Reichweite von ca. 10^{-15} m und ist daher in unserer makroskopischen Welt nicht direkt beobachtbar.
4. **Schwache Wechselwirkung:** die schwache Wechselwirkung wird durch den Austausch von massiven W und Z Bosonen beschrieben. Diese Kraft ist z.B. für die Energieerzeugung in der Sonne und den radioaktiven Zerfall verantwortlich. Die Quantentheorie hierzu heisst **Quantenflavourdynamik (QFD)**. Die schwache Kraft hat eine sehr kurze Reichweite von ca. 10^{-18} m und ist daher in unserer makroskopischen Welt nicht direkt beobachtbar.

Die letzten drei Wechselwirkungen werden zusammenfassend im **Standardmodell der Teilchenphysik** beschrieben:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
 & +i\bar{\Psi}i\not{D}\Psi \\
 & +(D_{\mu}\Phi)^2 - V(\Phi) \\
 & +iy\bar{\Psi}\Phi\Psi + \text{h.c.}
 \end{aligned} \tag{39}$$

Daneben gibt es noch viele abgeleitete (nicht fundamentale) Kräfte, wie z.B. Federkraft (Hook) oder Reibungskräfte, die beide ihren Ursprung in der Coulombkraft haben können.

2 Eindimensionale Probleme

2. Vorlesung: Freitag 14.10.2022

2.1 Erhaltungssätze I

Die Gesamtenergie eines Teilchens ist durch seine kinetische Energie E_{kin} und seine potentielle Energie $E_{pot} = U$ gegeben.

$$\begin{aligned} E &= E_{kin} + E_{pot} \\ &= \frac{m}{2}v^2 + U. \end{aligned} \quad (40)$$

Ohne äußere Wechselwirkungen ist diese Energie erhalten - wir werden diese Aussage später zweimal beweisen, beim zweiten Mal zeigen wir mit Hilfe des Noether Theorems (**Emmy-Noether-Campus**), dass Zeittranslationsinvarianz der Naturgesetze Energieerhaltung zur Folge hat.

Weiterhin ist in einem abgeschlossenen System der Gesamtimpuls erhalten. Bei einem Stoß von zwei Teilchen gilt z.B. dass der Impuls der Teilchen vor dem Stoß $\vec{p}_{1,2}$, gleich dem Impuls der Teilchen nach dem Stoß $\vec{p}'_{1,2}$ ist.

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2. \quad (41)$$

Beweis:

Bezeichnen wir in einem Mehrteilchensystem mit \vec{F}_{ik} die Kraftwirkung des i -ten Teilchens auf das k -te Teilchen, dann ist in einem Mehrteilchensystem die Gesamtkraft auf das k -te Teilchen gleich

$$\vec{F}_k = \sum_i \vec{F}_{ik} = \dot{\vec{p}}_k \quad (42)$$

Somit gilt für die Zeitableitungen aller Impulse

$$\frac{d}{dt} \sum_k \vec{p}_k = \sum_k \dot{\vec{p}}_k = \sum_{i,k} \vec{F}_{ik}. \quad (43)$$

Beachtet man $\vec{F}_{ik} = 0$ und das 3. Newtonsche Gesetz $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$, so sieht man, dass die obige Summe Null ergibt und damit der Gesamtimpuls zeitlich konstant ist.

Später zeigen wir mit Hilfe des Noether Theorems dass Raumtranslationsinvarianz der Naturgesetze Impulserhaltung zur Folge hat.

2.2 Eindimensionale Probleme

Landau III, 11

2.2.1 Schwingungsdauer

Wir betrachten ein Teilchen mit der Masse m das sich in einer Dimension x unter Einwirkung der potentiellen Energie $U(x)$ bewegt. Seine Gesamtenergie ist gegeben durch

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x). \quad (44)$$

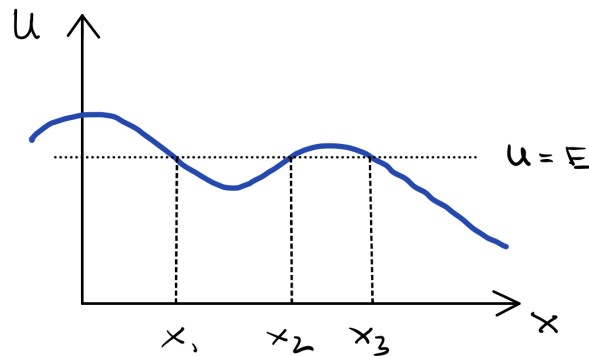
Dies kann umgeformt werden in

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}, \\ t - t_0 &= \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{E - U(x')}}. \end{aligned} \quad (45)$$

Die kinetische Energie ist immer positiv definit

$$E_{kin} \geq 0 \Rightarrow E - E_{pot} \geq 0 \Rightarrow E \geq E_{pot}. \quad (46)$$

D.h. es gibt nur eine Bewegung wenn die Gesamtenergie größer als die potentielle Energie ist. Betrachten wir nun ein allgemeines Potential der Form



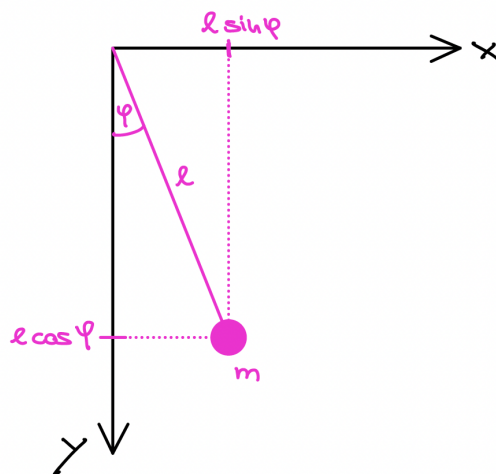
mit dem eingezeichneten Wert der Gesamtenergie E .
 Hier gibt es eine endliche/finite Bewegung zwischen den Punkten x_1 und x_2 .
 An den Umkehrpunkten gilt $U(x) = E$, damit verschwindet an den Umkehrpunkten die kinetische Energie.
 Rechts vom Punkt x_3 gibt es nur eine unendliche/infinite Bewegung und das Teilchen läuft ins Unendliche.

Die eindimensionale finite Bewegung ist eine Schwingung mit der Periode

$$T(E) = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx'}{\sqrt{E - U(x')}}. \quad (47)$$

2.2.2 Beispiel 1: Mathematisches Pendel

Wir betrachten ein Pendel das aus einem Massenpunkt der Masse m besteht und an einem Faden der Länge l hängt. Der Auslenkungswinkel des Fadens im Vergleich zur Vertikalen wird mit φ bezeichnet.



Für die Koordinaten des Massenpunktes gilt

$$x = l \sin \varphi, \quad y = l \cos \varphi. \quad (48)$$

Die Gesamtenergie des Massenpunktes ist gegeben durch

$$E = E_{Kin} + E_{Pot} = \frac{m}{2}v^2 + mgh. \quad (49)$$

Für die Geschwindigkeit erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{x} &= l\dot{\varphi} \cos \varphi, & \dot{y} &= -l\dot{\varphi} \sin \varphi, \\ \Rightarrow v^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = l^2\dot{\varphi}^2. \end{aligned} \quad (50)$$

Die Höhe des Pendels h' im Vergleich zur Ruhelage bei $y = l$ lautet

$$h' = l - y = l - l \cos \varphi. \quad (51)$$

Die potentielle Energie mgh' beinhaltet immer den konstanten unbeobachtbaren Anteil mgl , diesen Term betrachten wir nicht weiter und wählen daher

$$h = -l \cos \varphi. \quad (52)$$

Weiterhin bezeichnen wir die Maximalauslenkung des Pendels mit φ_0 (an diesem Punkt verschwindet die kinetische Energie). Damit lautet die Gesamtenergie des Massenpunktes

$$E = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi = -mgl \cos \varphi_0. \quad (53)$$

Die beiden rechten Seiten kann man umformen zu

$$\begin{aligned} \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi &= -mgl \cos \varphi_0, \\ \frac{l}{2}\dot{\varphi}^2 &= g(\cos \varphi - \cos \varphi_0), \\ \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} &= dt, \\ \Rightarrow T &= 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}. \end{aligned} \quad (54)$$

Jetzt vereinfachen wir den Integranden

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2} \right) = \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \\ \cos \varphi - \cos \varphi_0 &= 2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \end{aligned} \quad (55)$$

Damit lautet die Schwingungsdauer

$$\Rightarrow T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}. \quad (56)$$

Schliesslich führen wir die Substitution

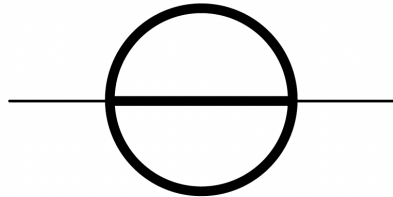
$$\begin{aligned} \sin \xi &= \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}}, \\ \Rightarrow d \sin \xi = \cos \xi d\xi &= \frac{d \sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} = \frac{1 \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} = \frac{1 \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi}{\sin \frac{\varphi_0}{2}}, \\ \Rightarrow \cos \xi = \sqrt{1 - \sin^2 \xi} &= \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2}}} = \frac{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}}, \\ \Rightarrow \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} &= \frac{2d\xi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = \frac{2d\xi}{\sqrt{1 - \sin^2 \xi \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}}}, \\ \varphi = 0 &\Rightarrow \sin \xi = 0 \Rightarrow \xi = 0, \\ \varphi = \varphi_0 &\Rightarrow \sin \xi = 1 \Rightarrow \xi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (57)$$

Damit kann die Schwingungsdauer geschrieben werden als

$$\Rightarrow T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \sin^2 \xi \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}}} =: 4\sqrt{\frac{l}{g}} K\left(\sin \frac{\varphi_0}{2}\right), \quad (58)$$

mit dem vollständigen **elliptischen Integral erster Art** $K(k)$.

Diese Art von Integrale treten z. B. auch in der Quantenfeldtheorie (= Quantenmechanik plus spezielle Relativitätstheorie) auf. Wenn man die Lebensdauer eines Elementarteilchens das B-Meson heisst, dann treten Beiträge auf, die durch das sogenannte **Sunset-diagramm** beschrieben werden [LPR20].



Sind massive Teilchen im Sunset-Diagramm dann treten elliptische Integrale auf. Mit einer genauen Bestimmung der B-Meson Lebensdauer kann man z.B. Modelle testen, die die Entstehung von Materie und dunkler Materie im Universum beschreiben.

Zurück zum Pendel: für kleine Maximalwinkel φ_0 können wir eine Taylorentwicklung machen:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\varphi_0}{2} &\approx \frac{\varphi_0}{2}, \\ \Rightarrow \sqrt{1 - \sin^2 \xi \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}} &\approx \sqrt{1 - \frac{\varphi_0^2}{4} \sin^2 \xi} \approx 1 - \frac{\varphi_0^2}{8} \sin^2 \xi, \\ \Rightarrow K\left(\sin \frac{\varphi_0}{2}\right) &\approx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{\varphi_0^2}{8} \sin^2 \xi\right) d\xi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \frac{\varphi_0^2}{16}. \end{aligned} \quad (59)$$

Somit lautet die Schwingungsdauer

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16} + \dots\right). \quad (60)$$

Der erste Term sollte aus der Schule bekannt sein.

2.2.3 Beispiel 2: Potential der Form $U(x) = A|x|^n$

Diese Potential ist symmetrisch und für den Umkehrpunkt gilt

$$E = A|x|^n \Rightarrow |x| = \left(\frac{E}{A}\right)^{\frac{1}{n}}. \quad (61)$$

Damit lautet die Schwingungsdauer

$$T(E) = 2\sqrt{2m} \int_0^{\left(\frac{E}{A}\right)^{\frac{1}{n}}} \frac{dx'}{\sqrt{E - Ax'^n}}. \quad (62)$$

Mit der Substitution $y^n = A/Ex^n$ lautet die Schwingungsdauer

$$T(E) = 2 \frac{\sqrt{2m}}{A^{\frac{1}{n}}} E^{\frac{1}{n} - \frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^n}}. \quad (63)$$

Mit einer weiteren Substitution $u = y^n$ wird die Schwingungsdauer auf folgende Form gebracht

$$T(E) = 2 \frac{\sqrt{2m}}{A^{\frac{1}{n}}} E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}} \frac{1}{n} \int_0^1 u^{\frac{1}{n}-1} (1-u)^{\frac{1}{2}-1} du. \quad (64)$$

Das Integral ist in der Form der Definition der **Eulerschen Betafunktion**

$$\beta(x, y) = 2 \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad (65)$$

mit $x = 1/n$ und $y = 1/2$. Die Eulersche Betafunktion kann wiederum auf die **Eulerschen Gammafunktion** zurückgeführt werden

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad (66)$$

wobei die Gammafunktion die analytische Fortsetzung der Fakultätsfunktion ist.

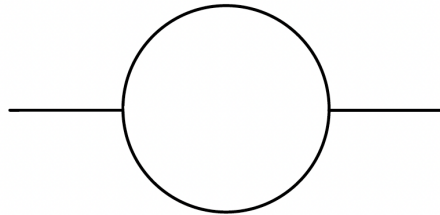
$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad (67)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (68)$$

Damit kann die Schwingungsdauer geschrieben werden als

$$T(E) = 2 \frac{\sqrt{2m\pi}}{A^{\frac{1}{n}}} E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}} \frac{1}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right)}. \quad (69)$$

Eulersche Gamma- und Betafunktionen treten auch in der Quantenfeldtheorien auf - hier bereits bei masselosen Ein-Schleifen Diagrammen.



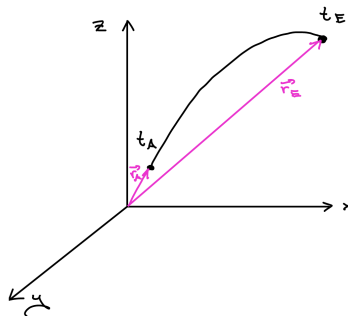
Dieses Diagramm kann z.B. die Aufspaltung eines Photons in ein Elektron und sein Antiteilchen, dem Positron, mit anschliessender Annihilierung der beiden Teilchen beschreiben.

2.3 Das Prinzip der kleinsten Wirkung

Feynman Lecture - Lagrangian - II 19

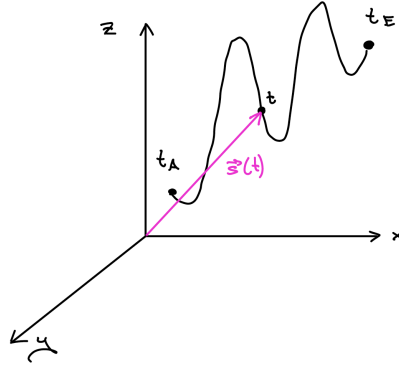
2.3.1 Die Wirkung

Wir machen nun ein Gedankenexperiment und betrachten zunächst die physikalische Bahnkurve $\vec{r}(t)$ eines Massenpunktes mit einem festen Ausgangspunkt \vec{r}_A zum Ausgangszeitpunkt t_A , d.h. $\vec{r}_A = \vec{r}(t_A)$ und einem festen Endpunkt \vec{r}_E zum Endzeitpunkt t_E , d.h. $\vec{r}_E = \vec{r}(t_E)$. Die Bewegung kann z.B. unter dem Einfluss des konstanten Gravitationsfeldes der Erde stattfinden.



In unseren Gedanken erlauben wir nun beliebige (sie müssen nicht der physikalischen Bahn entsprechen!) Bahnkurven $\vec{s}(t)$, die aber die Randbedingungen $\vec{s}(t_A) = \vec{r}_A$ und $\vec{s}(t_E) = \vec{r}_E$ erfüllen.

Beachte: Die Anfangs- und Endgeschwindigkeiten sind nun nicht als Randbedingungen vorgegeben! Sie müssen aus den Randbedingungen $\vec{s}(t_A) = \vec{r}_A$ und $\vec{s}(t_E) = \vec{r}_E$ bestimmt werden!



Für jede dieser hypothetischen Bahnkurven $\vec{s}(t)$ berechnen wir die kinetische Energie $E_{s,kin}(t) = \frac{1}{2}m\vec{v}(t)^2 = \frac{1}{2}m\dot{\vec{s}}(t)^2$ und die potentielle Energie $E_{s,pot}(t) = E_{s,pot}(\vec{s}(t))$.

Aus diesen beiden Größen bestimmen wir nun das **Wirkungsintegral** (= Zeitintegral über kinetische Energie minus potentielle Energie)

$$S_s = \int_{t_A}^{t_E} \left[\frac{1}{2}m\dot{\vec{s}}(t)^2 - E_{s,pot}(\vec{s}(t)) \right] dt. \quad (70)$$

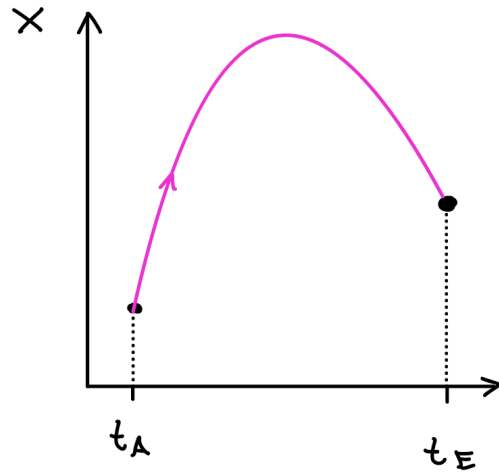
Es stellt sich nun heraus, dass die tatsächliche physikalische Bewegung (Index p) den Wert des Wirkungsintegrals minimiert,

$$S_p \leq S_s \quad \forall \text{ vorstellbaren Bahnkurven } \vec{s}(r). \quad (71)$$

Man kann die Newtonschen Axiome daher auch wie folgt umformulieren: **die physikalische Bahnkurve minimiert die Wirkung.**

2.3.2 Teilchen im konstanten Gravitationsfeld

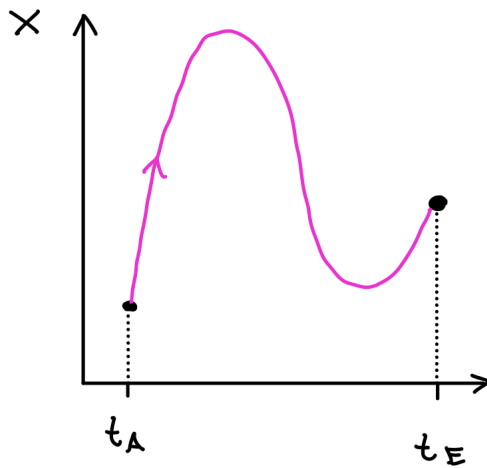
Betrachten wir als Beispiel die eindimensionale Bewegung im konstanten Gravitationsfeld der Erde: wir nehmen nur eine Bewegung in x -Richtung an und wir zeichnen nun ein Zeit-Höhen-Diagramm. Für den physikalischen Fall erhalten wir eine Parabel:



Das Wirkungsintegral lautet nun

$$S = \int_{t_A}^{t_E} \left[\frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 - mgx(t) \right] dt. \quad (72)$$

Prinzipiell könnten wir uns auch vorstellen, dass das Teilchen folgende Bewegung macht:



Es wird sich aber rausstellen, dass das Wirkungsintegral jeder beliebigen Bewegung immer größer (oder gleich, falls "beliebig" = physikalisch) dem Wirkungsintegral der physikalischen Bewegung ist.

Im physikalischen Fall (Ann: $t_A = 0$, $x_A = 0$) gilt

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t, \\ \Rightarrow x_E &= -\frac{1}{2}gt_E^2 + v_0t_E. \end{aligned} \quad (73)$$

Daraus können wir die Anfangsgeschwindigkeit aus dem Endpunkt bestimmen

$$\Rightarrow v_0 = \frac{x_E}{t_E} + \frac{1}{2}gt_E. \quad (74)$$

Für die Geschwindigkeit erhalten wir

$$\dot{x}(t) = -gt + v_0. \quad (75)$$

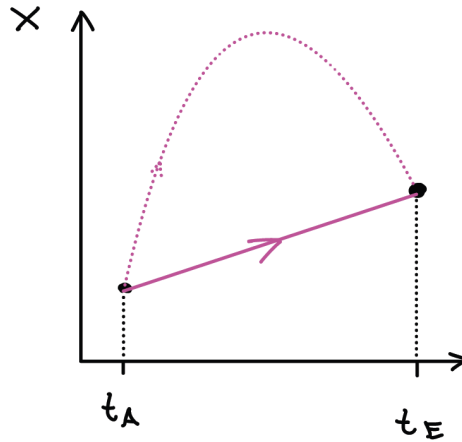
Damit ergibt sich für die Differenz aus kinetischer und potentieller Energie

$$\begin{aligned} E_{kin} - E_{pot} &= \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 - mgx(t), \\ &= \frac{1}{2}m(-gt + v_0)^2 + mg\frac{1}{2}gt^2 - mgv_0t, \\ &= mg^2t^2 - 2mgv_0t + \frac{1}{2}mv_0^2 \end{aligned} \quad (76)$$

und für das Wirkungsintegral

$$\begin{aligned} S_p &= \int_0^{t_E} \left[mg^2t^2 - 2mgv_0t + \frac{1}{2}mv_0^2 \right] dt, \\ &= \frac{1}{3}mg^2t_E^3 - mgv_0t_E^2 + \frac{1}{2}mv_0^2t_E, \\ &= \frac{1}{2}m\frac{x_E^2}{t_E} - \frac{1}{2}mgx_Et_E - \frac{1}{24}mg^2t_E^3. \end{aligned} \quad (77)$$

Würde sich hingegen das Teilchen mit einer konstanten Geschwindigkeit im Gravitationsfeld der Erde bewegen



dann erhalten wir folgende Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
 x(t) &= v_0 t, \\
 \Rightarrow x_E &= v_0 t_E, \\
 \Rightarrow v_0 &= \frac{x_E}{t_E}.
 \end{aligned} \tag{78}$$

$$\dot{x}(t) = v_0. \tag{79}$$

Man beachte, dass wir nun einen anderen Wert von v_0 erhalten, um die Randbedingungen zu erfüllen.

Für die Differenz aus kinetischer und potentieller Energie ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
 E_{kin} - E_{pot} &= \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 - mgx(t), \\
 &= \frac{1}{2} m v_0^2 - mgv_0 t
 \end{aligned} \tag{80}$$

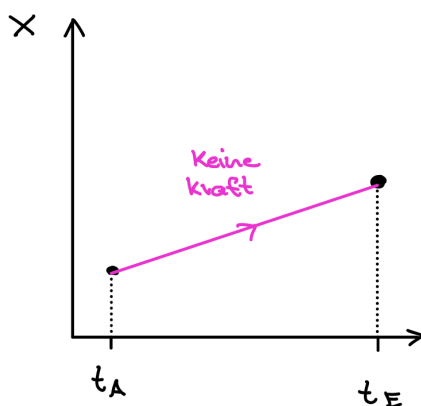
und

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{t_E} \left[\frac{1}{2} m v_0^2 - mgv_0 t \right] dt, \\
 &= \frac{1}{2} m v_0^2 t_E - \frac{1}{2} m g v_0 t_E^2, \\
 &= \frac{1}{2} m \frac{x_E^2}{t_E} - \frac{1}{2} m g x_E t_E = S_p + \frac{1}{24} m g^2 t_E^3
 \end{aligned} \tag{81}$$

für das Wirkungsintegral. Dieser Wert ist größer, als der Wert des Wirkungsintegrals der physikalischen Bewegung. Damit wurde unsere Behauptung mit einem Beispiel bestätigt.

2.3.3 Freies Teilchen

Ein noch einfacherer Sonderfall besteht in der kräftefreien Bewegung - hier gibt es keine potentielle Energie und das Wirkungsintegral ist das Integral über die kinetische Energie. Die physikalische Bahn ist durch eine gleichförmig konstante Bewegung gegeben.



Die Geschwindigkeit ist hierbei die Durchschnittsgeschwindigkeit v_0 . Bei einer beliebigen Geschwindigkeitsverteilung $v(t)$, kann die Durchschnittsgeschwindigkeit wie folgt bestimmt werden

$$v_0 = \int_{t_A}^{t_E} v(t) dt. \quad (82)$$

Wir nehmen nun an, dass der Weg von x_A nach x_E mit einer beliebigen Geschwindigkeitsverteilung

$$v(t) = v_0 + \delta v(t) \quad (83)$$

durchlaufen wird. Für $\delta v(t)$ gilt

$$0 = \int_{t_A}^{t_E} \delta v(t) dt. \quad (84)$$

Damit erhalten wir für die Differenz des Wirkungsintegrals mit einer beliebigen Geschwindigkeitsverteilung und mit der konstanten Durchschnittsgeschwindigkeit

$$\begin{aligned} S_s - S_p &= \frac{m}{2} \int_{t_A}^{t_E} [v(t)^2 - v_0^2] dt, \\ &= \frac{m}{2} \int_{t_A}^{t_E} [v_0^2 + 2v_0\delta v(t) + \delta v(t)^2 - v_0^2] dt, \\ &= \frac{m}{2} \int_{t_A}^{t_E} [\delta v(t)^2] dt \geq 0. \end{aligned} \tag{85}$$

Den allgemeinen Beweis für das Prinzip der kleinsten Wirkung zeigen wir später in der Vorlesung.

Wir wenden uns zunächst dem Zwei-Körperproblem mit Hilfe klassischer Newtonscher Mechanik zu.

3 Das Zweikörperproblem I

3. Vorlesung: Dienstag 18.10.2022

3.1 Schwerpunkt und Relativbewegung

Wir betrachten ein System von zwei Massenpunkten mit den Massen m_1 und m_2 und den Koordinaten \vec{r}_1 und \vec{r}_2 , die die Kräfte \vec{F}_{ij} aufeinander auswirken. Die Newtonschen Bewegungsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}_{21}, \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.\end{aligned}\tag{86}$$

Addiert man beide Gleichungen so erhält man

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0.\tag{87}$$

Der Schwerpunkt des Systems der beiden Massenpunkte ist definiert als

$$\vec{R}_S = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}.\tag{88}$$

Mit obiger Gleichung erhalten wir für die Schwerpunktsbewegung

$$\ddot{\vec{R}}_S = 0\tag{89}$$

eine geradlinig gleichförmige Bewegung.

Die eigentliche Dynamik liegt in der Relativbewegung und wir definieren

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2.\tag{90}$$

Die Definitionen von \vec{R}_S und \vec{r} können nach \vec{r}_1 und \vec{r}_2 aufgelöst werden

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{R}_S + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \\ \vec{r}_2 &= \vec{R}_S - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}.\end{aligned}\tag{91}$$

Die zweifache Zeitableitung ergibt

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= 0 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{21}, \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= 0 - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12}.\end{aligned}\tag{92}$$

Definiert man die reduzierte Masse

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (93)$$

so kann das Kraftgesetz auch wie folgt geschrieben werden

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{21}. \quad (94)$$

Das Zweikörperproblem spaltet sich also in eine geradlinig gleichförmige Bewegung des Schwerpunktes auf und in die Bewegung eines einzelnen Teilchens mit der Masse μ , gemäß Gleichung (94).

Nehmen wir als Beispiel das Keplerproblem, d.h. die Gravitationskraft zwischen zwei Himmelskörpern so lauten die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= +G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \end{aligned} \quad (95)$$

mit $r = |\vec{r}|$.

Wie oben gezeigt, bewegt sich der Schwerpunkt geradlinig gleichförmig, während wir für die Relativebewegung

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = f(r) \frac{\vec{r}}{r} = \vec{F}(r) \quad (96)$$

erhalten, was die Bewegung eines Teilchens der Masse μ unter der Wirkung der Zentralkraft $\vec{F}(r)$ beschreibt.

3.2 Numerische Lösung

Feynman - I9 - Numerische Integration

Als Erstes versuchen wir die Bewegungsgleichungen numerisch zu lösen. In Koordinaten lauten sie

$$\begin{aligned} \mu \ddot{x} &= \mu \dot{v}_x = F_x, \\ \mu \ddot{y} &= \mu \dot{v}_y = F_y, \\ \mu \ddot{z} &= \mu \dot{v}_z = F_z. \end{aligned} \quad (97)$$

Aus den Definitionen der Geschwindigkeit und der Beschleunigung erhalten wir

$$\begin{aligned}
 v_x(t) &= \frac{dx}{dt} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x(t+\epsilon) - x(t)}{\epsilon} \\
 &\Rightarrow x(t+\epsilon) = x(t) + \epsilon v_x(t), \\
 a_x(t) &= \frac{dv_x}{dt} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{v_x(t+\epsilon) - v_x(t)}{\epsilon} \\
 &\Rightarrow v_x(t+\epsilon) = v_x(t) + \epsilon a_x(t) = v_x(t) + \epsilon \frac{F_x(t)}{\mu} \quad (98)
 \end{aligned}$$

und analog für y und z .

Wir starten also mit den Anfangsbedingungen $\vec{r}_0 = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ und $\vec{v}_0 = (v_x(t_0), v_y(t_0), v_z(t_0))$ und bestimmen nun $v_i(t_0+\epsilon)$ und danach $x_i(t_0+\epsilon)$. Der neue Betrag des Radiusvektors lautet dann

$$r(t_0 + \epsilon) = \sqrt{x^2(t_0 + \epsilon) + y^2(t_0 + \epsilon) + z^2(t_0 + \epsilon)}. \quad (99)$$

Man kann die numerische Stabilität und den Zeitaufwand für eine Simulation verbessern, wenn man die Geschwindigkeit nicht am Rand des Intervalles $[t, t + \epsilon]$, sondern in dessen Mitte benutzt

$$\begin{aligned}
 x(t + \epsilon) &= x(t) + \epsilon v_x\left(t + \frac{\epsilon}{2}\right), \\
 v_x\left(t + \frac{\epsilon}{2}\right) &= v_x\left(t - \frac{\epsilon}{2}\right) + \epsilon a_x(t) = v_x\left(t - \frac{\epsilon}{2}\right) + \epsilon \frac{F_x(t)}{\mu}, \\
 v_x\left(\frac{\epsilon}{2}\right) &= v_x(0) + \frac{\epsilon}{2} a_x(0). \quad (100)
 \end{aligned}$$

Für die Planetenbewegung in 2 Dimensionen (x und y -Richtung) gilt: ¹

$$\begin{aligned}
 F_x &= -\frac{Gm_1m_2x}{r^3}, \\
 F_y &= -\frac{Gm_1m_2y}{r^3}, \\
 r &= \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (101)
 \end{aligned}$$

Computerprogramm: [Übungsaufgabe 3: programmieren](#)

¹Weiter unten zeigen wir, warum diese Einschränkung angenommen werden kann.

A) Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned}t &= 0, & \epsilon &= 0.1, \\v_x(t=0) &= 0.0, & v_y(t=0) &= 1.63, \\x(t=0) &= 0.5, & y(t=0) &= 0.\end{aligned}\tag{102}$$

sowie ($Gm_1m_2/\mu \rightarrow 1$)

$$\begin{aligned}r(0) &= \sqrt{x(0)^2 + y(0)^2}, \\a_x(0) &= -\frac{x(0)}{r(0)^3}, \\a_y(0) &= -\frac{y(0)}{r(0)^3}\end{aligned}\tag{103}$$

und daraus abgeleitet

$$\begin{aligned}v_x\left(\frac{-\epsilon}{2}\right) &= v_x(0) - \frac{\epsilon}{2}a_x(0), \\v_y\left(\frac{-\epsilon}{2}\right) &= v_y(0) - \frac{\epsilon}{2}a_y(0).\end{aligned}\tag{104}$$

P1) Zeichne einen Punkt an der Stelle $(x(t), y(t))$.

P2) 1. Rechenschritt

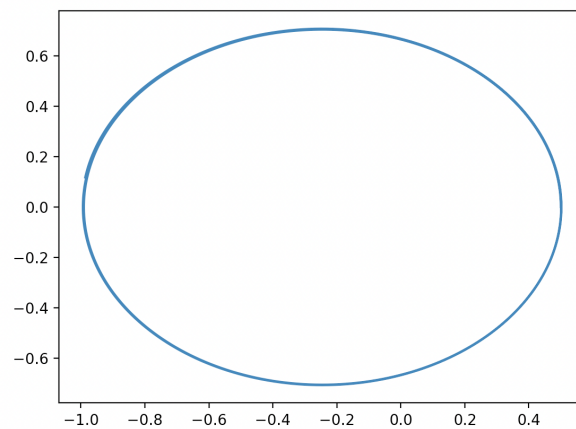
$$\begin{aligned}x(t+\epsilon) &= x(t) + \epsilon v_x\left(t + \frac{\epsilon}{2}\right), \\v_x\left(t + \frac{\epsilon}{2}\right) &= v_x\left(t - \frac{\epsilon}{2}\right) + \epsilon a_x(t).\end{aligned}\tag{105}$$

P3) 2. Rechenschritt

$$\begin{aligned}r(t+\epsilon) &= \sqrt{x(t+\epsilon)^2 + y(t+\epsilon)^2}, \\a_x(t+\epsilon) &= -\frac{x(t+\epsilon)}{r(t+\epsilon)^3}, \\a_y(t+\epsilon) &= -\frac{y(t+\epsilon)}{r(t+\epsilon)^3}.\end{aligned}\tag{106}$$

P4) $t = t + \epsilon$ - gehe zu P1) und zeichne einen Punkt...

```
main.py x
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import math
3
4 class Planet:
5     def __init__(self, vx, vy, px, py):
6         self.vx = vx
7         self.vy = vy
8         self.px = px
9         self.py = py
10        self.r = math.sqrt(px ** 2 + py ** 2)
11        self.ax = - px/self.r**3
12        self.ay = - py/self.r**3
13
14    planet = Planet(0.1, 0.63, 0.5, 0)
15
16    x = []
17    y = []
18
19    # Zeitschritte
20    eps = 0.0001
21
22    # Schleife
23    for t in range(0, 100000, 1):
24        x.append(planet.px)
25        y.append(planet.py)
26        planet.px = planet.px + eps * planet.vx
27        planet.py = planet.py + eps * planet.vy
28        planet.vx = planet.vx + eps * planet.ax
29        planet.vy = planet.vy + eps * planet.ay
30        planet.r = math.sqrt(planet.px ** 2 + planet.py ** 2)
31        planet.ax = - planet.px / (planet.r ** 3)
32        planet.ay = - planet.py / (planet.r ** 3)
33
34    plt.plot(x, y)
35    plt.show()
36
```



3.3 Analytische Lösung

Scheck - 1.6, Landau

3.3.1 Zentralkräfte

Nun werden wir

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = f(r) \frac{\vec{r}}{r} \quad (107)$$

analytisch lösen.

Bemerkungen:

- Eine **Zentralkraft** (hängt nur vom Betrag r ab und nicht von der Richtung und zeigt in Richtung vom Ursprung oder davon weg) kann aus einem Potential $U(r)$ abgeleitet werden.

$$\begin{aligned} U(r) - U(r_0) &= - \int_{r_0}^r f(r') dr' , \\ U(r) &= - \frac{Gm_1 m_2}{r} , \\ \vec{F}(r) = f(r) \frac{\vec{r}}{r} &= - \vec{\nabla} U(r) . \end{aligned} \quad (108)$$

(Siehe TP1, Kap. 2 für Divergenz et al.)

- Für eine Zentralkraft ist der Drehimpuls

$$\vec{L} := \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \quad (109)$$

erhalten.

$$\text{Beweis: } \frac{d\vec{L}}{dt} := \underbrace{\mu \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{=0} + \mu \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0 + \frac{f(r)}{r} \underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_{=0} = 0. \quad (110)$$

Später zeigen wir mit Hilfe des Noether-Theorems, dass Rotationsinvarianz der Naturgesetze Drehimpulserhaltung zur Folge hat.

Die Bewegung unter Einfluss einer Zentralkraft verläuft also in einer

Ebene senkrecht zu \vec{L} - in zwei Dimensionen, die durch \vec{r}_0 und \vec{v}_0 aufgespannt sind.

Übungsaufgabe Drehimpuls: Sonne vs. Planeten, Ju = 16, Saturn = 7, Neptun = 2,...

Zur Lösung des Zweikörperproblemess verwenden wir Polarkoordinaten in der Ebene senkrecht zum Drehimpuls.

$$\begin{aligned}x(t) &= r(t) \cos[\varphi(t)], \\y(t) &= r(t) \sin[\varphi(t)]. \\z(t) &= 0.\end{aligned}\tag{111}$$

Damit erhalten wir folgende Geschwindigkeiten

$$\begin{aligned}v_x(t) &= \dot{r}(t) \cos[\varphi(t)] - r(t) \dot{\varphi}(t) \sin[\varphi(t)], \\v_y(t) &= \dot{r}(t) \sin[\varphi(t)] + r(t) \dot{\varphi}(t) \cos[\varphi(t)], \\v_z(t) &= 0, \\\vec{v}^2 &= \dot{r}^2(t) + r^2(t) \dot{\varphi}^2(t)\end{aligned}\tag{112}$$

und den Drehimpuls

$$\begin{aligned}L_x(t) &= 0, \\L_y(t) &= 0, \\L_z(t) &= \mu r(t) \cos[\varphi(t)] \{ \dot{r}(t) \sin[\varphi(t)] + r(t) \dot{\varphi}(t) \cos[\varphi(t)] \} \\&\quad - \mu r(t) \sin[\varphi(t)] \{ \dot{r}(t) \cos[\varphi(t)] - r(t) \dot{\varphi}(t) \sin[\varphi(t)] \} \\&= \mu r^2(t) \dot{\varphi}(t).\end{aligned}\tag{113}$$

Aus der Erhaltung des Drehimpulses $L_z \equiv L$ können wir somit einen Zusammenhang zwischen r und $\dot{\varphi}$ herleiten.

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{L}{\mu r^2(t)}.\tag{114}$$

Weiterhin ist die Energie (wir lassen nun die explizite Zeitabhängigkeit von r und $\dot{\varphi}$ in der Notation weg)

$$E = \frac{\mu}{2} \vec{v}^2 + U(r) = \frac{\mu}{2} [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2] + U(r)\tag{115}$$

erhalten.

Beweis:

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{\mu}{2} 2\vec{v}\dot{\vec{v}} + \frac{dU(r)}{dt} \\ &= \mu\vec{r}\ddot{\vec{r}} + \vec{\nabla}U(r)\frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= \dot{\vec{r}}\left(\vec{F} + \vec{\nabla}U(r)\right) = 0.\end{aligned}\tag{116}$$

Ersetzen wir in der Gesamtenergie $\dot{\varphi}$ durch den Drehimpuls L so hängt diese nur noch von r und \dot{r} ab

$$E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r).\tag{117}$$

3.3.2 Effektives Potential

Wir definieren als **effektives Potential**:

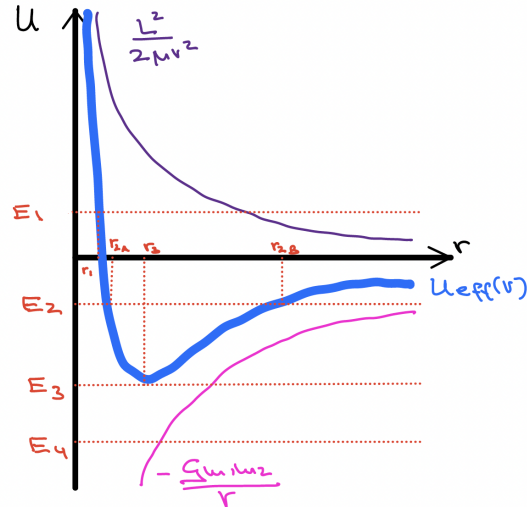
$$U_{eff}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}.\tag{118}$$

D.h. der Radialteil des Zweikörperproblemles mit einer Zentralkraft kann als eindimensionale Bewegung im effektiven Potential beschrieben werden.

Im Falle der Gravitation lautet das effektive Potential

$$U_{eff}(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}.\tag{119}$$

Graphisch erhalten wir für den Fall $L \neq 0$:



Wir finden nun mehrere Möglichkeiten:

- $E = E_4$: Die minimale Energie des Teilchens im Potential ist bei $\dot{r} = 0$ und sie lautet $L^2/(2\mu r^2) + U(r)$. Die Energie E_4 ist unterhalb dieses Betrages und kann daher nicht auftreten.
- $E = E_3$: Es gibt einen gebundenen Zustand mit nur einem möglichen Wert von $r = r_3$.

$$E_3 = U_{eff}(r_3) = U(r_3) + \frac{L^2}{2\mu r_3^2}. \quad (120)$$

Es handelt sich daher um eine Kreisbewegung.

- $E = E_2$: Es gibt einen gebundenen Zustand mit mehreren möglichen Werten von r . Die beiden Extremwerte r_{2A} und r_{2B} von r werden bestimmt durch

$$E_2 = U_{eff}(r_{2A,B}) = U(r_{2A,B}) + \frac{L^2}{2\mu r_{2A,B}^2}. \quad (121)$$

Es könnte sich um eine Ellipsenbahn handeln.

- $E = E_1$: Es gibt keinen gebundenen Zustand, da die Energie zu groß ist. Der minimale Abstand vom Zentrum lautet $r = r_1$.

$$E_1 = U_{eff}(r_1) = U(r_1) + \frac{L^2}{2\mu r_1^2}. \quad (122)$$

Probieren Sie die verschiedenen Möglichkeiten mit Ihrem Computerprogramm durch!

4 Kepler-Gesetze, Erhaltungssätze

4. Vorlesung: Freitag 21.10.2022

4.1 Fortsetzung Kepler-Problem

4.1.1 Effektives Potential

In der letzten Vorlesung hatten wir das effektive Potential in der Form

$$\begin{aligned}U_{eff}(r) &= U(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2} \\ &= -\frac{Gm_1m_2}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2} \\ &=: -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2},\end{aligned}\tag{123}$$

mit $\alpha = Gm_1m_2 > 0$ und $\beta = L^2/(2\mu) > 0$. Das Minimum des effektiven Potentials befindet sich bei

$$\begin{aligned}\frac{dU_{eff}(r_{min})}{dr} &= \frac{\alpha}{r^2} - 2\frac{\beta}{r^3} = 0, \\ \Rightarrow r_{min} &= \frac{2\beta}{\alpha} = \frac{L^2}{\alpha\mu} (= r_3)\end{aligned}\tag{124}$$

und besitzt dabei den Wert

$$U_{eff}(r_{min}) = -\frac{\alpha^2}{4\beta} = -\frac{\alpha^2\mu}{2L^2} = E_3.\tag{125}$$

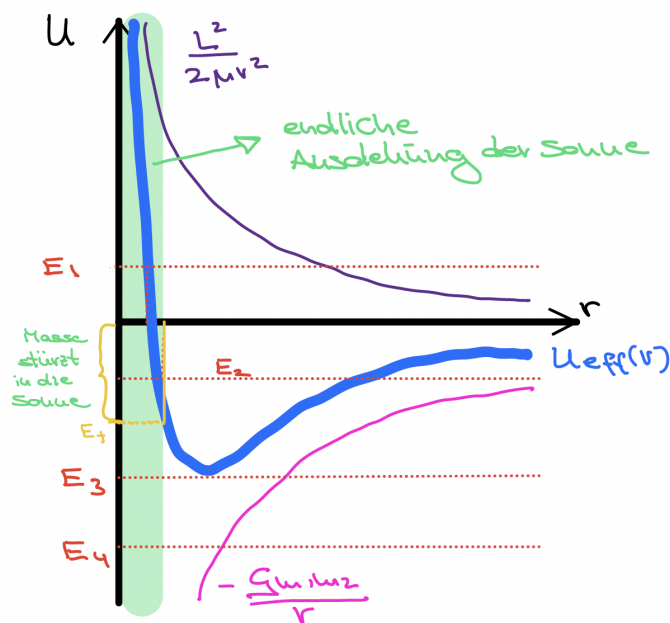
Weiter unten werden wir die Konstanten p und ϵ definieren, die direkt mit r_{min} und $U_{eff}(r_{min})$ zusammenhängen:

$$\begin{aligned}p &:= \frac{L^2}{\alpha\mu} = r_{min}, \\ \epsilon^2 &:= 1 + \frac{2EL^2}{\alpha^2\mu} = 1 - \frac{E}{U_{eff}(r_{min})}.\end{aligned}\tag{126}$$

Wir finden daher 3 Wertebereiche für ϵ

- a) $E = U_{eff}(r_{min}) \Rightarrow \epsilon = 0$: in diesem Fall gibt es als gebundenen Zustand eine Kreisbahn.
- b) $0 > E > U_{eff}(r_{min}) \Rightarrow \epsilon < 1$: in diesem Fall gibt es gebundene Zustände mit verschiedenen Radien, weiter unten werden wir zeigen, dass dies Ellipsenbahnen sind.
- c) $E > 0 > U_{eff}(r_{min}) \Rightarrow \epsilon > 1$: in diesem Fall gibt es nur ungebundene Zustände.

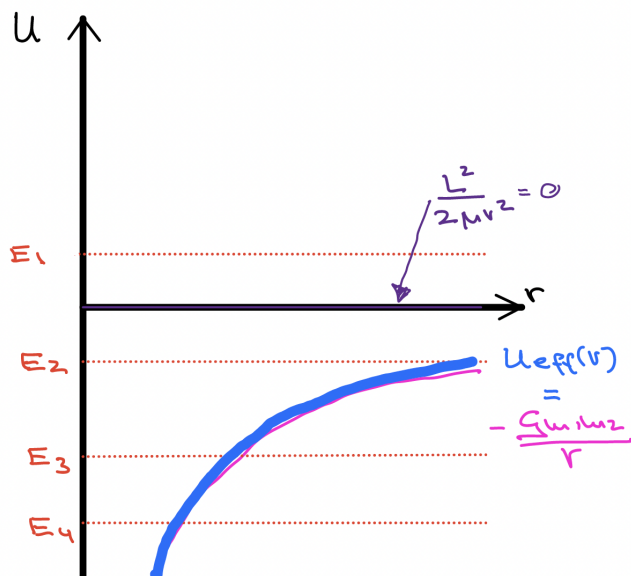
Wir finden somit, dass für den Fall $L \neq 0$ das Teilchen niemals ins Zentrum fallen kann. Das widerspricht der naiven Erwartung und rührt daher, dass wir die Sonne als punktförmige Massenansammlung angenähert haben. Berücksichtigen wir die endliche Ausdehnung der Sonne so erhalten wir folgendes Bild.



Bei Energien die größer sind als $E = E_{\dagger} = E(r_{Sonne})$ ist der minimale Abstand der Kreisbahn kleiner als der Radius der Sonne und unsere Testmasse kollidiert mit dieser.

Schliesslich gibt es die Möglichkeit eines verschwindenden Drehimpulses $L =$

0. In diesem Fall gilt $\dot{\phi} = 0$. Die minimale Energie des Teilchens im Potential ist bei $\dot{r} = 0$ und sie lautet $U(r)$. Wir finden damit folgendes Bild



Nun kollidiert das Teilchen immer mit der Sonne!

4.1.2 Allgemeine Lösung des Zweikörperproblems

Nach den Überlegungen zum effektiven Potential wollen wir das Kepler-Problem analytisch lösen.

Aus der Energieerhaltung in Gl.(117) folgt, dass \dot{r} als Funktion von r dargestellt werden kann:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2(E - U_{eff}(r))}{\mu}} = \sqrt{\frac{2E}{\mu} + \frac{2\alpha}{\mu r} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2}}. \quad (127)$$

Separation der Variablen ergibt

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2(E - U_{eff}(r))}{\mu}}} = \frac{\mu r dr}{\sqrt{2E\mu r^2 + 2\alpha\mu r - L^2}}. \quad (128)$$

und damit für die Umlaufsdauer

$$T(r) = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2(E-U_{eff}(r))}{\mu}}} = \int \frac{\mu r dr}{\sqrt{2E\mu r^2 + 2\alpha\mu r - L^2}}. \quad (129)$$

Aus der Drehimpulserhaltung in Gl.(114) bekommen wir

$$d\varphi = \frac{L}{\mu r^2} dt = \frac{L dr}{r^2 \sqrt{2\mu(E - U_{eff}(r))}} = \frac{L dr}{r \sqrt{2\mu E r^2 + 2\alpha\mu r - L^2}} \quad (130)$$

und damit

$$\varphi(r) = \int \frac{L dr}{r^2 \sqrt{2\mu(E - U_{eff}(r))}} = \int \frac{L dr}{r \sqrt{2\mu E r^2 + 2\alpha\mu r - L^2}}. \quad (131)$$

Die Gleichungen (129) und (131) stellen die allgemeinen Lösungen des 2-Körperproblems mit einem allgemeinen Potential $U(r)$ dar. Prinzipiell können diese Integrale gelöst werden. Es sind implizite Gleichungen für $r(t)$ und $r(\varphi)$.

4.1.3 Lösung des Kepler-Problems

Um die Bahnkurven des Kepler-Problems zu finden, beginnen wir wieder mit Gl.(117)

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2(E - U(r))}{\mu} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2}}. \quad (132)$$

Diese Gleichung multiplizieren wir mit Gl.(114)

$$\frac{1}{r^2 \dot{\varphi}} = \frac{\mu}{L} \quad (133)$$

und erhalten

$$\frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} \frac{1}{r^2} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{1}{r^2} = \sqrt{\frac{2\mu(E - U(r))}{L^2} - \frac{1}{r^2}}. \quad (134)$$

Mit $U(r) = -\alpha/r$ und $\sigma(\varphi) = 1/r(\varphi)$ erhalten wir weiter

$$\begin{aligned}
-\frac{d\sigma}{d\varphi} &= \sqrt{\frac{2\mu(E + \alpha\sigma)}{L^2} - \sigma^2} \\
\Rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2 &= \frac{2\mu E}{L^2} + 2\frac{\mu\alpha}{L^2}\sigma - \sigma^2 \\
&= \frac{2\mu E}{L^2} + \frac{\mu^2\alpha^2}{L^4} - \frac{\mu^2\alpha^2}{L^4} + 2\frac{\mu\alpha}{L^2}\sigma - \sigma^2 \\
&= \frac{\mu^2\alpha^2}{L^4} \left(\frac{2EL^2}{\alpha^2\mu} + 1\right) - \left(\sigma - \frac{\mu\alpha}{L^2}\right)^2. \tag{135}
\end{aligned}$$

Nun definieren wir die Konstanten

$$p := \frac{L^2}{\alpha\mu}, \quad \epsilon := \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\alpha^2\mu}}. \tag{136}$$

Wie bereits oben gezeigt ist $\epsilon^2 = 1 - E/U_{eff}(r_{min})$ und damit dimensionlos, während $p = r_{min}$ die Dimension einer Länge hat. Damit lautet Gl.(135)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\epsilon^2}{p^2} - \left(\sigma - \frac{1}{p}\right)^2. \tag{137}$$

mit $\tilde{\sigma} = \sigma - 1/p$ erhalten wir

$$\left(\frac{d\tilde{\sigma}}{d\varphi}\right)^2 + \tilde{\sigma}^2 = \frac{\epsilon^2}{p^2}. \tag{138}$$

Diese Gleichung kann nun einfach durch

$$\tilde{\sigma} = \frac{\epsilon}{p} \cos(\varphi - \varphi_0) \tag{139}$$

gelöst werden:

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{\sigma}}{d\varphi} &= -\frac{\epsilon}{p} \sin(\varphi - \varphi_0), \\
\left(\frac{d\tilde{\sigma}}{d\varphi}\right)^2 &= \frac{\epsilon^2}{p^2} \sin^2(\varphi - \varphi_0), \\
\tilde{\sigma}^2 &= \frac{\epsilon^2}{p^2} \cos^2(\varphi - \varphi_0). \tag{140}
\end{aligned}$$

Damit lautet unsere Radialfunktion

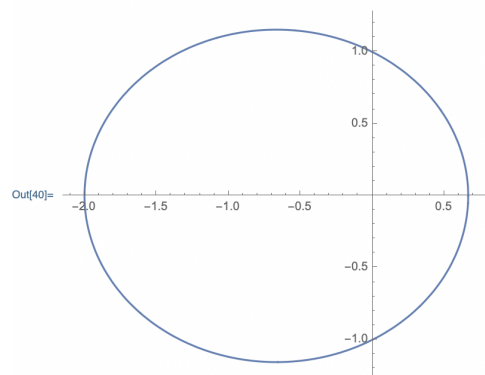
$$r = r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad (141)$$

und das Kepler-Problem ist im Prinzip geometrisch gelöst! Für $\epsilon = 0$ ergibt sich $r = p = \text{const.}$ und damit eine Kreisbewegung. Integriert man Gl.(131), so erhält man dieselbe Lösung. Um die allgemeine Bahnform zu bestimmen kann diese Gleichung in den Computer eingegeben werden

```
r[p_, eps_, phi_] = p / (1 + eps Cos[phi])
```

```
Out[33]=  $\frac{p}{1 + \text{eps Cos}[\text{phi}]}$ 
```

```
In[40]:= ParametricPlot[{r[1, 0.5, phi] Cos[phi], r[1, 0.5, phi] Sin[phi]}, {phi, 0, 2 Pi}]
```



5 Kepler-Gesetze II

5. Vorlesung: Dienstag 25.10.2022

5.1 Ellipsengleichung

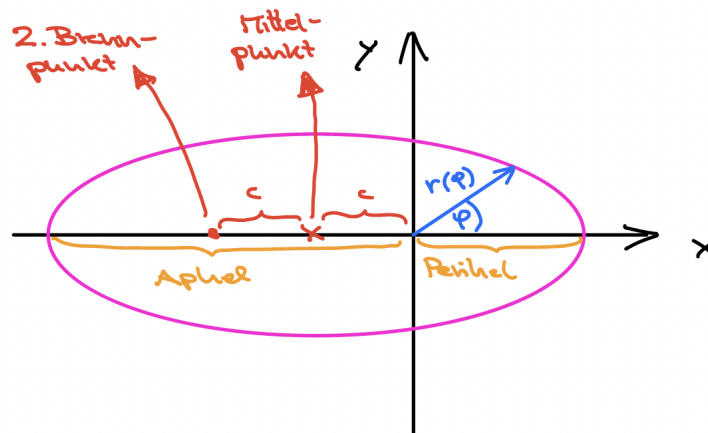
In der letzten Vorlesung hatten wir als Radialfunktion

$$r = r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad (142)$$

erhalten. Graphisch sieht das wie eine Ellipse aus. Mit $\varphi_0 = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} r(\varphi = 0) &= \frac{p}{1 + \epsilon} < p, \\ r(\varphi = \pi) &= \frac{p}{1 - \epsilon} > p. \end{aligned} \quad (143)$$

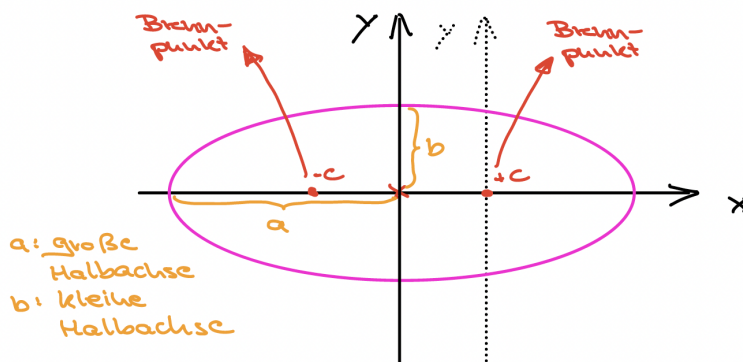
D.h. in dieser Parametrisierung ist der Ursprung nicht im Mittelpunkt der Ellipse, sondern entlang der x -Achse verschoben. Unten werden wir sehen, dass sich der Ursprung in dieser Parametrisierung in einem Brennpunkt befindet.



Im Falle des Systems Erde-Sonne werden wir weiter unten zeigen, dass sich die Sonne mit guter Näherung in einem Brennpunkt der Ellipsenbahn der Erde befindet. Der kürzeste Abstand zwischen Erde und Sonne wird als Perihel ($r(\varphi = 0)$) bezeichnet, der größte als Aphel ($r(\varphi = \pi)$).

Um explizit zu beweisen, dass es sich geometrisch um Ellipsen handelt führen wir eine Verschiebung entlang der x -Achse ein

$$\begin{aligned} x(t) &= r(\varphi(t)) \cos[\varphi(t)] + c, \\ y(t) &= r(\varphi(t)) \sin[\varphi(t)]. \end{aligned} \quad (144)$$



Wir werden die Konstante c so bestimmen, dass wir eine Ellipsengleichung um den Ursprung der Ellipse erhalten.

Gleichung (142) ergibt

$$\begin{aligned} r &= \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi)}, \\ \Rightarrow r &= p - r\epsilon \cos(\varphi), \\ \Rightarrow (x - c)^2 + y^2 = r^2 &= [p - r\epsilon \cos(\varphi)]^2 = [p - \epsilon(x - c)]^2. \end{aligned} \quad (145)$$

Multipliziert man die linke und die rechte Seite dieser Gleichung aus, so erhält man

$$\begin{aligned} x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &= p^2 - 2p\epsilon(x - c) + \epsilon^2(x - c)^2 \\ &= p^2 - 2p\epsilon x + 2p\epsilon c + \epsilon^2 x^2 - 2x\epsilon c^2 + \epsilon^2 c^2. \end{aligned} \quad (146)$$

Sortiert nach Potenzen von x und y ergibt sich

$$x^2(1 - \epsilon^2) + y^2 = 2x(c - p\epsilon - \epsilon c^2) - c^2 + p^2 + 2p\epsilon c + \epsilon^2 c^2. \quad (147)$$

Nun wählen wir die Konstante c so, dass die linearen Terme in x verschwinden, d.h.

$$c = \frac{p\epsilon}{1 - \epsilon^2}. \quad (148)$$

Damit lautet der konstante Term von Gl.(147)

$$\begin{aligned} p^2 + 2p\epsilon c - c^2(1 - \epsilon^2) &= p^2 + 2\frac{p^2\epsilon^2}{(1 - \epsilon^2)} - \frac{p^2\epsilon^2}{(1 - \epsilon^2)} \\ &= \frac{p^2}{(1 - \epsilon^2)} (1 - \epsilon^2 + \epsilon^2) = \frac{p^2}{(1 - \epsilon^2)}. \end{aligned}$$

Somit lautet die quadratische Gleichung in x und y

$$\begin{aligned} x^2(1 - \epsilon^2) + y^2 &= \frac{p^2}{(1 - \epsilon^2)}, \\ \frac{x^2}{\frac{p^2}{(1 - \epsilon^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2}{(1 - \epsilon^2)}} &= 1. \end{aligned} \quad (149)$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse. Wir definieren nun noch die grosse und kleine Halbachse

$$\begin{aligned} a &= \frac{p}{1 - \epsilon^2}, \\ b &= \frac{p}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \end{aligned} \quad (150)$$

und erhalten damit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (151)$$

Beachte: die Brennpunkte einer Ellipse mit den Halbachsen a und b liegen bei $(\pm\sqrt{a^2 - b^2})$. Für unsere Parameter gilt:

$$a^2 - b^2 = \frac{p^2}{(1 - \epsilon^2)^2} - \frac{p^2}{1 - \epsilon^2} = \frac{p^2\epsilon^2}{(1 - \epsilon^2)^2} = c^2. \quad (152)$$

Damit ist unsere obige Behauptung bewiesen, dass c ein Brennpunkt der Ellipse ist.

5.2 Zwei-Körper-Bewegungen

Wir haben nun die Relativbewegung (d.h. $\vec{r}(\varphi)$) gelöst, die Schwerpunktsbewegung (d.h. $\vec{R}_S(t)$) war eine geradlinig gleichförmige Bewegung. Damit ist

auch die Bewegung jedes einzelnen der beiden Massenpunkte bekannt.

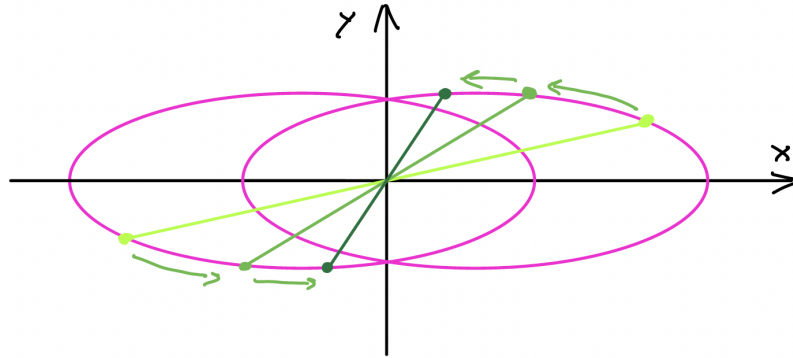
$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{R}_S + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \\ \vec{r}_2 &= \vec{R}_S - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}.\end{aligned}\quad (153)$$

Es handelt sich also um eine Überlagerung der geradlinig gleichförmigen Schwerpunktsbewegung mit einer Ellipsenbahn (im gebundenen Fall). Die Ellipsenbahn hat dabei einen Vorfaktor $m_i/(m_1 + m_2)$ und der Ursprung der Ellipsenbahn sitzt im Schwerpunkt des Systems.

Im Falle zweier gleichschwerer Massen erhalten wir

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{R}_S + \frac{1}{2} \vec{r}, \\ \vec{r}_2 &= \vec{R}_S - \frac{1}{2} \vec{r}.\end{aligned}\quad (154)$$

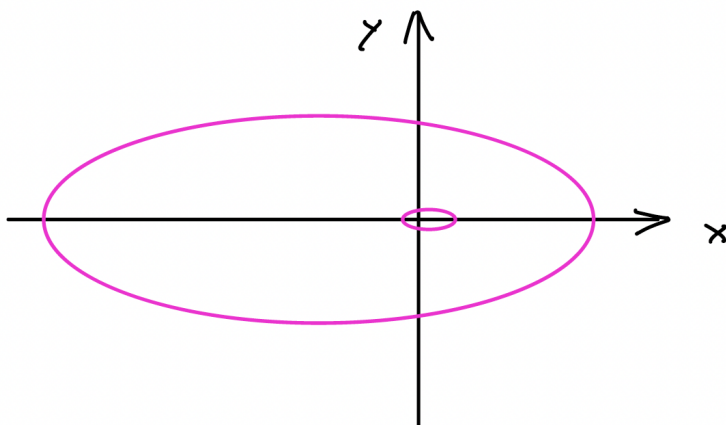
Im Schwerpunktsystem durchläuft m_1 die Ellipse $\frac{1}{2}\vec{r}(\varphi)$ und m_2 die Ellipse $-\frac{1}{2}\vec{r}(\varphi)$. Beide Massenpunkten befinden sich somit immer entlang einer Geraden, die durch den Ursprung geht.



Für das Erde-Sonne-System gilt $m_1 \gg m_2$, genauer $m_2/m_1 = (5,9722 \cdot 10^{24} \text{ kg}) / (1,98847 \cdot 10^{30} \text{ kg}) \approx 3 \cdot 10^{-6}$ und somit erhalten wir die Ortsvektoren der Sonne und der Erde

$$\begin{aligned}\vec{r}_{\text{Sonne}} &\approx \vec{R}_S + 3 \cdot 10^{-6} \vec{r}, \\ \vec{r}_{\text{Erde}} &\approx \vec{R}_S + \vec{r}.\end{aligned}\quad (155)$$

Der mittlere Abstand der Erde von der Sonne beträgt 149.6 Millionen km und kann als typisches Mass für r angesehen werden. Damit erhalten wir $3 \cdot 10^{-6}r \approx 450$ km, d.h. die Sonne bewegt sich um ca. 450 km (vgl. der Radius der Sonne ist ca. 700 000 km) um den Brennpunkt der Ellipsenbahn liegt.



5.3 Kepler-Gesetze

5.3.1 Erstes Keplersches Gesetz:

Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen. In einem ihrer Brennpunkte steht die Sonne.

Wie oben gezeigt, bewegt sich die Erde auf einer Ellipsenbahn mit einem typischen Radius von der Größenordnung 150 Millionen km, während die Sonne sich auf Ellipsenbahn mit einem typischen Radius von der Größenordnung 450 km bewegt. Der Radius der Sonne beträgt 696340 km, d.h. in einer sehr guten Näherung ruht die Sonne in einem Brennpunkt.

5.3.2 Zweites Keplersches Gesetz:

Ein von der Sonne zum Planeten gezogener Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen.

Die überstrichene Fläche dF kann wie folgt bestimmt werden

$$\begin{aligned} dF &= \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}|, \\ \Rightarrow \frac{dF}{dt} &= \frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \frac{1}{2\mu} |\vec{L}| = \text{const}. \end{aligned} \quad (156)$$

Aus der Drehimpulserhaltung folgt also direkt die Konstanz der Flächengeschwindigkeit dF/dt .

5.3.3 Drittes Keplersches Gesetz:

Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich zueinander wie die Kuben (dritten Potenzen) der großen Halbachsen ihrer Bahnellipsen.

In der Umlaufzeit T überstreicht der Fahrstrahl die gesamte Fläche F der Ellipse, $F = ab\pi$. Erinnern wir uns, dass $a = b^2/p$ gilt, so erhalten wir $F = a\sqrt{a}\sqrt{p}\pi$ und somit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu} |\vec{L}| &= \frac{F}{T} = \frac{a\sqrt{a}\sqrt{p}\pi}{T} \\ \frac{a^3}{T^2} &= \frac{L^2}{4\pi^2\mu^2 p} = \frac{\alpha}{4\pi\mu} = \frac{G}{4\pi^2} (m_1 + m_2) \approx \frac{G}{4\pi^2} m_1 = \text{const.} \end{aligned} \quad (157)$$

wobei $p = L^2/(\alpha\mu)$ benutzt wurde.

5.4 Laplace-Lenz-Runge-Vektor

In den Übungen werden Sie zeigen, dass ein $1/r$ Potential zu geschlossenen Bahnen führt, während z.B. eine zusätzliche Störung der Form $1/r^2$ zu sogenannten Rosettenbahnen führt. Man kann zeigen, dass die Geschlossenheit der Bahnen im $1/r$ -Fall an der Erhaltung des sogenannten Laplace-Runge-Lenz-Vektors (zuerst bewiesen von Jakob Hermann (1678-1733)) liegt

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - \mu\alpha \frac{\vec{r}}{r}. \quad (158)$$

Bemerkungen:

1. \vec{L} steht senkrecht zur Bewegungsebene, daher liegt $\vec{p} \times \vec{L}$ in der Bewegungsebene. Da \vec{r} ebenfalls in dieser Ebene liegt, ist auch \vec{A} in der Bewegungsebene.

2. \vec{A} zeigt in die Richtung des Perihels der Bewegung.

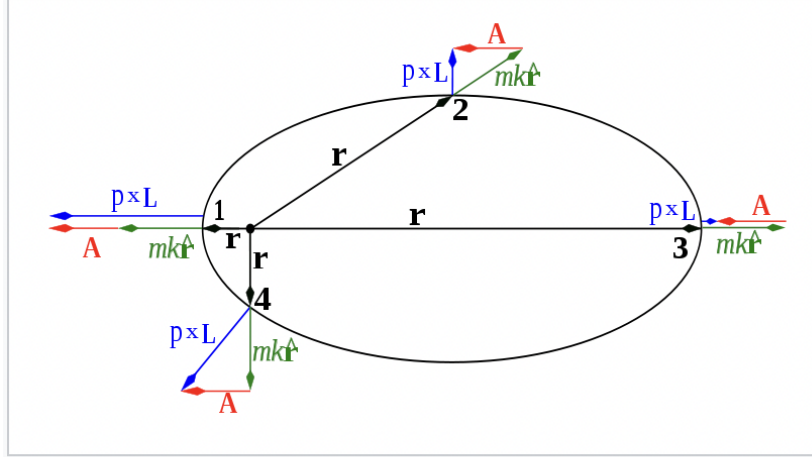


Figure 1: The LRL vector \mathbf{A} (shown in red) at four points (labeled 1, 2, 3 and 4) on the elliptical orbit of a bound point particle moving under an inverse-square central force. The center of attraction is shown as a small black circle from which the position vectors (likewise black) emanate. The angular momentum vector \mathbf{L} is perpendicular to the orbit. The coplanar vectors $\mathbf{p} \times \mathbf{L}$ and $(mk/r)\mathbf{r}$ are shown in blue and green, respectively; these variables are defined below. The vector \mathbf{A} is constant in direction and magnitude. \square

3. Erhaltung der LRL-Vektors:
Im Gravitationspotential gilt

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = -\frac{\alpha}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\alpha}{r^2} \hat{r} \quad (159)$$

und damit

$$\frac{d}{dt}(\vec{p} \times \vec{L}) = \frac{d\vec{p}}{dt} \times \vec{L} + \vec{p} \times \frac{d\vec{L}}{dt} = -\frac{\alpha}{r^2} \hat{r} \times \vec{L} + 0 = -\frac{\alpha\mu}{r^3} \vec{r} \times \vec{r} \times \dot{\vec{r}}. \quad (160)$$

Mit $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ erhalten wir

$$\vec{r} \times \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{r}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - r^2 \dot{\vec{r}}. \quad (161)$$

Benutzen wir weiter

$$2r \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}(r^2) = \frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{r}) = 2\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} \quad (162)$$

so ergibt sich

$$\frac{d}{dt}(\vec{p} \times \vec{L}) = -\frac{\alpha\mu}{r^3} \left(\vec{r}(r \dot{r}) - r^2 \dot{\vec{r}} \right) = \alpha\mu \left(\frac{1}{r} \dot{\vec{r}} - \frac{1}{r^2} \vec{r} \dot{r} \right) = \alpha\mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right). \quad (163)$$

Damit ist die Zeitunabhängigkeit des LRL-Vektors bewiesen!

Beim Kepler-Problem gibt es also nur einfach geschlossene Bahnen und keine Rosettenbahnen. In der Realität ergeben sich aber Abweichungen vom reinen Zweikörperproblem durch Einflüsse der übrigen Planeten im Sonnensystem (siehe Dreikörperproblem) und man misst endliche Periheldrehungen. In unserem Sonnensystem sind diese am meisten ausgeprägt beim Planeten Merkur. Der beobachtete Wert von 572 Bogensekunden (1 Bogensekunden = 1/3600 Grad = 0.00027 Grad) setzt sich zusammen aus

- 280 Bogensekunden: Einfluss der Venus.
- circa 150 Bogensekunden: Störungen durch Jupiter.
- circa 100 Bogensekunden: restliche Planeten.
- 43,11 Bogensekunden: Allgemeine Relativitätstheorie (anfänglich wurde vermutet, dass es einen Planeten Vulkan innerhalb der Merkurbahn gibt.).

Prinzipiell könnte eine Periheldrehung auch durch eine Abweichung der Sonnenform von der sphärischen Symmetrie verursacht werden.

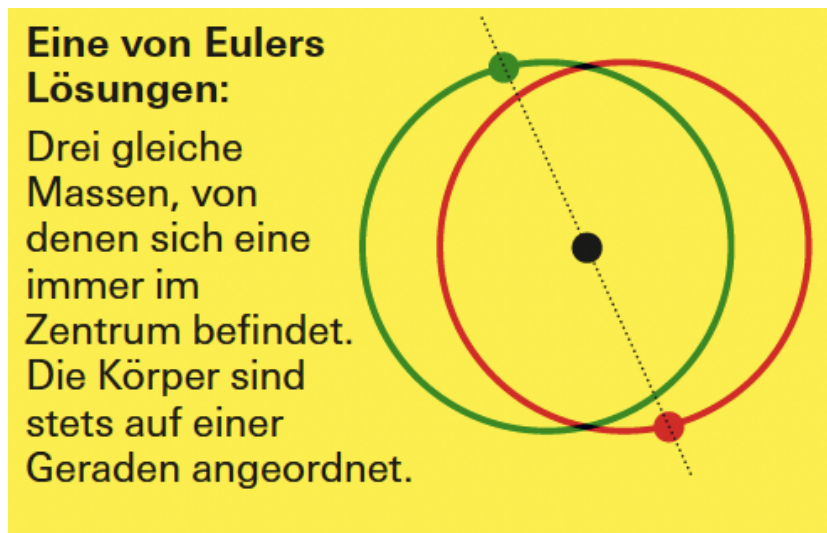
5.5 Ausblick auf das Dreikörperproblem

Betrachten wir drei Massenpunkte, so erhalten wir folgende Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} - G \frac{m_1 m_3}{r_{13}^2} \frac{\vec{r}_{13}}{r_{13}}, \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} - G \frac{m_2 m_3}{r_{23}^2} \frac{\vec{r}_{23}}{r_{23}}, \\ m_3 \ddot{\vec{r}}_3 &= -G \frac{m_1 m_3}{r_{13}^2} \frac{\vec{r}_{13}}{r_{13}} - G \frac{m_2 m_3}{r_{23}^2} \frac{\vec{r}_{23}}{r_{23}}. \end{aligned} \quad (164)$$

Diese Gleichungen können natürlich numerisch behandelt werden, aber nicht allgemein analytisch. Gegenwärtig sind nur 5 Typen von exakten Lösungen für Spezialfälle bekannt, siehe [Mon20]

1. 3 von Euler 1767 entdeckt, z.B. 3 gleiche Massen, 1 immer im Zentrum, alle 3 auf einer Geraden.

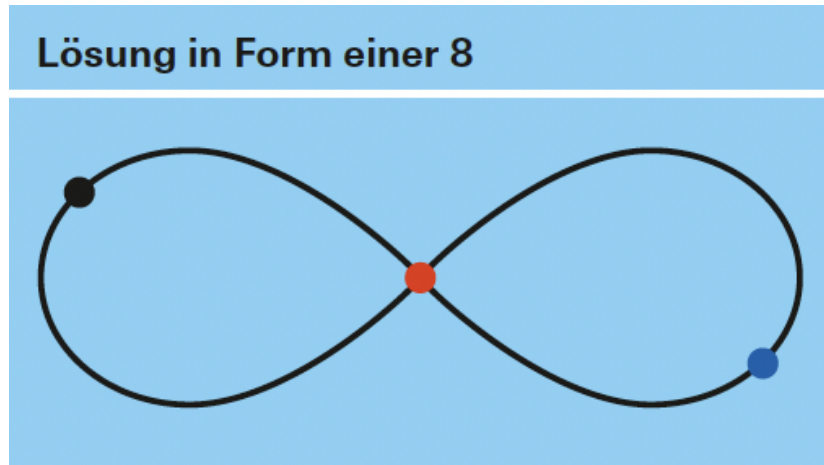


2. 2 von Lagrange 1772 entdeckt, z.B. 3 Massen bilden ein gleichseitiges Dreieck.



Ende des 19. Jh erkannte Poincare, dass das Dreikörperproblem im allgemeinen chaotisch und damit unlösbar ist. Es gibt auch viele nicht-periodische Lösungen, d.h. Lösungen die sich nie wiederholen.

Aktueller Zweig der Mathematik (Topologie, Riemannsche Geometrie, Dynamik): neue Lösungen werden immer wieder gefunden, siehe z.B.



See also: <https://arxiv.org/abs/1910.07291>

Newton vs the machine: solving the chaotic three-body problem using deep neural networks

Philip G. Breen, Christopher N. Foley, Tjarda Boekholt, Simon Portegies Zwart

6 Erhaltungssätze für Mehrteilchensysteme

6. Vorlesung: Freitag 28.10.2022

Scheck 1.7.... 1.14

6.1 Zweiteilchensystem

6.1.1 Koordinaten

Im Zweiteilchensystem konnten wir die Bewegung in eine Schwerpunktsbewegung und eine Relativbewegung aufspalten.

$$\vec{R}_S = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad (165)$$

mit den Massen

$$M = m_1 + m_2, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (166)$$

In Umkehrung gilt:

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_S + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \vec{R}_S - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \quad (167)$$

6.1.2 Impulse

Für die Impulse finden wir folgende Aufspaltung

$$\begin{aligned} \vec{P}_S &:= M \dot{\vec{R}}_S = m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2, \\ \vec{p} &:= \mu \dot{\vec{r}} = \frac{m_2 \vec{p}_1 - m_1 \vec{p}_2}{m_1 + m_2}, \end{aligned} \quad (168)$$

bzw. als Umkehrung

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 &= \vec{p} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{P}_S, \\ \vec{p}_2 &= -\vec{p} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{P}_S. \end{aligned} \quad (169)$$

6.1.3 Kinetische Energie

Die gesamte kinetische Energie lautet

$$T = T_1 + T_2 = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2}. \quad (170)$$

In Analogie untersuchen wir

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + \frac{\vec{P}_S^2}{2M} \\ &= \frac{(m_2\vec{p}_1 - m_1\vec{p}_2)^2}{2(m_1 + m_2)^2} + \frac{(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2}{2(m_1 + m_2)} \\ &= \frac{m_2^2\vec{p}_1^2 - 2m_1m_2\vec{p}_1\vec{p}_2 + m_1^2\vec{p}_2^2}{2(m_1 + m_2)m_1m_2} + \frac{\vec{p}_1^2 + 2\vec{p}_1\vec{p}_2 + \vec{p}_2^2}{2(m_1 + m_2)} \\ &= \frac{m_2(m_1 + m_2)\vec{p}_1^2 + m_1(m_1 + m_2)\vec{p}_2^2}{2(m_1 + m_2)m_1m_2} \\ &= \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} = T. \end{aligned} \quad (171)$$

Die gesamte kinetische Energie kann also als Summe der kinetischen Energie der Relativbewegung, $\vec{p}^2/(2\mu)$, und der kinetischen Energie der Schwerpunktsbewegung, $\vec{P}_S^2/(2M)$, dargestellt werden.

6.1.4 Drehimpuls

Schliesslich betrachten wir die Summe der Drehimpulse

$$\begin{aligned} \vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 &= m_1\vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + m_2\vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2 \\ &= m_1 \left(\vec{R}_S + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \right) \times \left(\dot{\vec{R}}_S + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right) \\ &\quad + m_2 \left(\vec{R}_S - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \right) \times \left(\dot{\vec{R}}_S - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right) \\ &= (m_1 + m_2) \vec{R}_S \times \dot{\vec{R}}_S + \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \left(\frac{m_1m_2^2 + m_2m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \right) \\ &= M \vec{R}_S \times \dot{\vec{R}}_S + \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \\ &= \vec{L}_S + \vec{L}_{rel}. \end{aligned} \quad (172)$$

Der Gesamtdrehimpuls kann in einen Schwerpunktsdrehimpuls $\vec{L}_S = M\vec{R}_S \times \dot{\vec{R}}_S$ und einen Relativdrehimpuls $\vec{L}_{rel} = \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ aufgespalten werden. Beachte \vec{L}_S hängt vom Ursprung ab, \vec{L}_{rel} nicht!

6.2 Vielteilchensystem

Wir erweitern diese Konzepte nun auf Vielteilchensysteme mit n Massen m_1, m_2, \dots, m_n . Die Massen üben gegenseitig interne Kräfte \vec{F}_{ik} aus und es wirken externe Kräfte \vec{K}_i . Die internen Kräfte sollen wieder Zentralkräfte sein, d.h.

$$\vec{F}_{ik} = F_{ik}(r_{ik}) \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_i}{r_{ik}}, \quad (173)$$

mit $r_{ik} = |\vec{r}_k - \vec{r}_i|$.

Zentralkräfte können wieder aus einem Potential abgeleitet werden

$$U_{ik}(r) = - \int_{r_0}^r F_{ik}(r') dr' \Leftrightarrow \vec{F}_{ik} = -\vec{\nabla}_k U_{ik}(r), \quad (174)$$

wobei

$$\vec{\nabla}_k = \left(\frac{\partial}{\partial x^{(k)}}, \frac{\partial}{\partial y^{(k)}}, \frac{\partial}{\partial z^{(k)}} \right),$$

$$r = \sqrt{(x^{(i)} - x^{(k)})^2 + (y^{(i)} - y^{(k)})^2 + (z^{(i)} - z^{(k)})^2}. \quad (175)$$

Die Bewegungsgleichungen für die einzelnen Massen lauten dann

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{k \neq i}^n \vec{F}_{ki} + \vec{K}_i. \quad (176)$$

6.3 Schwerpunkt

Der Schwerpunkt \vec{R}_S des n -Teilchensystems

$$\vec{R}_S = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{M} \quad (177)$$

bewegt sich wie ein einzelner Massenpunkt mit der Masse M unter dem Einfluss der externen Kräfte, i.e.

$$M\ddot{\vec{R}}_S = \sum_{i=1}^n \vec{K}_i. \quad (178)$$

Das bedeutet die internen Kräfte spielen keine Rolle - auch wenn sie sehr kompliziert oder stark sind.

Beweis:

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\vec{r}}_i &= \sum_{k \neq i}^n \vec{F}_{ki} + \vec{K}_i, \\ \sum_i^n m_i \ddot{\vec{r}}_i &= \sum_i^n \sum_{k \neq i}^n \vec{F}_{ki} + \sum_i^n \vec{K}_i, \\ M\ddot{\vec{R}}_S &= 0 + \sum_i^n \vec{K}_i. \quad \square \end{aligned} \quad (179)$$

6.4 Drehimpulserhaltung

Die zeitliche Änderung des gesamten Drehimpulses ist gleich dem Drehmoment der äußeren Kräfte:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \vec{L}_i \right) = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{K}_i. \quad (180)$$

Beweis: für jeden Wert von i gilt

$$\begin{aligned} \vec{L}_i &= m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i, \\ \frac{d}{dt} \vec{L}_i &= m_i \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{k \neq i}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_{ki} + \vec{r}_i \times \vec{K}_i \\ &= \sum_{k \neq i}^n F_{ki}(r_{ki}) \frac{\vec{r}_i \times (\vec{r}_i - \vec{r}_k)}{r_{ik}} + \vec{r}_i \times \vec{K}_i, \\ \sum_{i=0}^n \sum_{k \neq i}^n F_{ki}(r_{ki}) \frac{\vec{r}_i \times (\vec{r}_i - \vec{r}_k)}{r_{ik}} &= - \sum_{i=0}^n \sum_{k \neq i}^n F_{ik}(r_{ik}) \frac{\vec{r}_i \times \vec{r}_k}{r_{ik}} = 0. \quad \square \end{aligned} \quad (181)$$

6.5 Energieerhaltung

Die zeitliche Änderung der gesamten inneren Energie ist gleich der Leistung der äußeren Kräfte.

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \sum_{i=1}^n \vec{v}_i \cdot \vec{K}_i \quad (182)$$

mit

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i^2, \\ U &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=i+1}^n U_{ik}(r_{ik}) = U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_1). \end{aligned} \quad (183)$$

Beweis: für jeden Wert von i gilt

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\vec{r}}_i &= \sum_{k \neq i}^n \vec{F}_{ki} + \vec{K}_i = -\vec{\nabla}_i \sum_{k \neq i}^n U_{ik}(r_{ik}) + \vec{K}_i, \\ m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i &= \frac{d}{dt} \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2} = -\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{\nabla}_i \sum_{k \neq i}^n U_{ik}(r_{ik}) + \vec{K}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i, \\ \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2} \right) &= -\sum_{i=1}^n \sum_{k \neq i}^n \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{\nabla}_i U_{ik}(r_{ik}) + \sum_{i=1}^n \vec{K}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i. \end{aligned} \quad (184)$$

Betrachtet man in der Doppelsumme das Paar (ik, ki) , so findet man

$$\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{\nabla}_i U_{ik}(r_{ik}) + \dot{\vec{r}}_k \cdot \vec{\nabla}_k U_{ki}(r_{ki}) = \left[\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{\nabla}_i + \dot{\vec{r}}_k \cdot \vec{\nabla}_k \right] U_{ik}(r_{ik}) = \frac{d}{dt} U_{ik}. \quad (185)$$

Damit folgt

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2} \right) = -\sum_{i=1}^n \sum_{k=i+1}^n \frac{d}{dt} U_{ik} + \sum_{i=1}^n \vec{K}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \quad (186)$$

und somit die Behauptung!

□

6.6 Galilei-Transformationen

Die allgemeinste Transformation G , die Inertialsysteme auf Inertialsysteme abbildet, muss folgende Form haben:

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \hat{R}\vec{r} + \vec{v}t + \vec{a}, \quad (187)$$

$$t \rightarrow t' = \lambda t + s. \quad (188)$$

Die Galilei-Transformationen haben folgende Elemente

1. Raumtranslation: Verschiebung des Ursprunges um den konstanten Vektor \vec{a} .

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}. \quad (189)$$

Beweis:

$$\ddot{\vec{r}}' = \ddot{\vec{r}} + \vec{0}, \quad (190)$$

d.h. die Bewegungsgleichungen ändern sich nicht.

2. Gleichförmig geradlinige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit \vec{v} :

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}t, \quad (191)$$

Beweis:

$$\ddot{\vec{r}}' = \ddot{\vec{r}} + \vec{0}, \quad (192)$$

d.h. die Bewegungsgleichungen ändern sich nicht und es treten keine neuen Kräfte auf.

3. Rotation im Raum (keine zeitabhängige Rotation!):

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \hat{R}\vec{r}. \quad (193)$$

Beweis:

$$\ddot{\vec{r}}' = \hat{R}\ddot{\vec{r}}. \quad (194)$$

Hier ist nun nicht offensichtlich, dass sich die Bewegungsgleichungen nicht ändern.

Ein Rotation soll den Betrag des Vektors nicht ändern, d.h.

$$r^2 = r'^2 = \sum_{i=1}^3 r'_i r'_i = \sum_{i,k,l=1}^3 R_{ik} r_k R_{il} r_l = \sum_{k,l=1}^3 \delta_{kl} r_k r_l = \sum_{k=1}^3 r_k r_k. \quad (195)$$

Für die Rotationsmatrizen R muss daher gelten

$$\sum_{i=1}^3 R_{ik} R_{il} = \sum_{i=1}^3 (R^T)_{ik} R_{il} = \delta_{kl}. \quad (196)$$

Bei den Drehmatrizen R handelt es sich also um reelle, orthogonale 3×3 Matrizen. Aus der Bedingung $\hat{R}^T \hat{R} = \mathbb{1}$ folgt

$$(\det \hat{R})^2 = 1 \Rightarrow \det \hat{R} = \pm 1. \quad (197)$$

Eine 3×3 Matrix hat 9 freie Parameter, Gleichung (197) liefert 6 Einschränkungen, somit hat die Drehmatrix \hat{R} 3 freie Parameter. Das können zum Beispiel die Drehwinkel um die x -, y - und z -Achse sein: $\vec{\theta} = (\theta_x, \theta_y, \theta_z)$.

Warum lässt dies die Bewegungsgleichungen invariant?

Ausgehend von

$$\vec{F} = m \ddot{\vec{r}} \quad (198)$$

können wir einen beliebige zeitunabhängige Matrixmultiplikation vornehmen

$$\begin{aligned} \hat{A} \vec{F} &= m \hat{A} \ddot{\vec{r}} \\ \vec{F}' &= m \ddot{\vec{r}}' \end{aligned} \quad (199)$$

und die Bewegungsgleichungen bleiben forminvariant.

Bei allgemeinen linearen Transformation wird sich allerdings die kinetische Energie ändern!

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} r^2 &= \frac{d}{dt} \vec{r}^2 = 2 \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}, \\ \frac{d^2}{dt^2} r^2 &= 2(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}}), \\ \Rightarrow \dot{r}^2 &= \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} r^2 - \vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}}. \end{aligned} \quad (200)$$

Im transformierten System kann diesselbe Gleichung hergeleitet werden

$$\dot{r}'^2 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} r'^2 - \dot{r}' \cdot \ddot{r}' = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} \hat{A}^T \cdot \hat{A} \vec{r} - \dot{\vec{r}} \hat{A}^T \cdot \hat{A} \ddot{\vec{r}}. \quad (201)$$

D.h. nur mit $\hat{A}^T \hat{A} = \mathbb{1}$ ändert sich die kinetische Energie nicht und $\hat{A}^T \hat{A} = \mathbb{1}$ war die Bedingung für eine Drehmatrix!

4. Zeittranslation: Verschiebung des Zeitursprunges um s

$$t \rightarrow t' = \lambda t + s. \quad (202)$$

Das Zeitdifferential ändert sich damit wie folgt

$$dt \rightarrow dt' = \lambda dt. \quad (203)$$

In den Newtonschen Bewegungsgleichungen taucht die zweite Zeitableitung auf, d.h.

$$dt^2 \rightarrow dt'^2 = \lambda^2 dt^2 = dt^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1. \quad (204)$$

Die Galilei-Transformationen hängen also von 10 Parametern ab: \vec{a} , \vec{v} , $\vec{\theta}$ und s . Im n -Teilchensystem gibt es auch 10 Erhaltungsgrößen: \vec{P} , $\vec{R}_S(0) = \vec{R}_S(t) - \frac{\vec{P}}{M}t$, \vec{L} und E . Ist das Zufall?

7 Einschub: Gruppentheorie

7. Vorlesung: Freitag 4.11.2022

7.1 Galilei-Gruppe

Behauptung: Die Menge aller Transformationen G bildet eine Gruppe, genauer die **eigentlich** ($\det \hat{R} = +1$), **orthochrone** ($\lambda = +1$) **Galilei-Gruppe** G_+^\uparrow .

Betrachten wir 2 Galilei-Transformationen, die hintereinander ausgeführt werden

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \hat{R}_1 \vec{r}_0 + \vec{v}_1 t_0 + \vec{a}_1, & t_1 &= t_0 + s_1, \\ \vec{r}_2 &= \hat{R}_2 \vec{r}_1 + \vec{v}_2 t_1 + \vec{a}_2, & t_2 &= t_1 + s_2,\end{aligned}\tag{205}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\vec{r}_2 &= \hat{R}_2(\hat{R}_1 \vec{r}_0 + \vec{v}_1 t_0 + \vec{a}_1) + \vec{v}_2(t_0 + s_1) + \vec{a}_2, & t_2 &= (t_0 + s_1) + s_2, \\ &= \hat{R}_2 \hat{R}_1 \vec{r}_0 + \hat{R}_2 \vec{v}_1 t_0 + \hat{R}_2 \vec{a}_1 + \vec{v}_2 t_0 + \vec{v}_2 s_1 + \vec{a}_2, & t_2 &= t_0 + s_1 + s_2, \\ &= \hat{R}_2 \hat{R}_1 \vec{r}_0 + (\hat{R}_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_2) t_0 + (\hat{R}_2 \vec{a}_1 + \vec{v}_2 s_1 + \vec{a}_2), & t_2 &= t_0 + (s_1 + s_2), \\ &=: \hat{R}_3 \vec{r}_0 + \vec{v}_3 t_0 + \vec{a}_3, & t_2 &= t_0 + s_3.\end{aligned}\tag{206}$$

Das sieht wieder aus, wie eine Galilei-Transformation, wir müssen nur noch zeigen, dass \hat{R}_3 auch eine Rotationsmatrix ist.

$$\begin{aligned}\hat{R}_3^T \hat{R}_3 &= (\hat{R}_2 \hat{R}_1)^T (\hat{R}_2 \hat{R}_1) \\ &= \hat{R}_1^T \hat{R}_2^T \hat{R}_2 \hat{R}_1 = \hat{R}_1^T \mathbb{1} \hat{R}_1 = \mathbb{1}.\end{aligned}\tag{207}$$

Damit ist die Hintereinanderausführung zweier Galilei-Transformationen wieder eine Galilei-Transformation.

7.2 Definition: Gruppe

Eine **Gruppe** G ist eine Menge mit einer Verknüpfung \cdot für die gilt:

1. Abgeschlossenheit: $f, g \in G \Rightarrow h = f \cdot g \in G$.
2. Assoziativität: $f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h \quad \forall f, g, h \in G$.
3. Einheitsselement: $\exists e \in G \ni e \cdot f = f \cdot e = f \quad \forall f \in G$.

4. Inverses: $\forall f \in G \exists f^{-1} \in G \ni f \cdot f^{-1} = f^{-1} \cdot f = e$.

Wir können nun zeigen, dass die Galileigruppe eine Gruppe im mathematischen Sinne ist:

1. Abgeschlossenheit: wir haben oben gezeigt

$$G(\hat{R}_2, \vec{v}_2, \vec{a}_2, s_2) \cdot G(\hat{R}_1, \vec{v}_1, \vec{a}_1, s_1) = G(\hat{R}_3, \vec{v}_3, \vec{a}_3, s_3). \quad (208)$$

2. Assoziativität: Matrixmultiplikation, Matrix mal Vektor und Skalar mal Vektor sind assoziativ!

3. Identität:

$$\mathbb{1} = G(\mathbb{1}, \vec{0}, \vec{0}, 0). \quad (209)$$

4. Inverses:

$$G(\hat{R}_1, \vec{v}_1, \vec{a}_1, s_1)^{-1} = G(\hat{R}_1^T, -\hat{R}_1^T \vec{v}_1, \hat{R}_1^T (s\vec{v}_1 - \vec{a}_1), -s_1). \quad (210)$$

Damit ist bewiesen, dass die Galileigruppe eine mathematische Gruppe ist.

□

In den Übungen werden diskrete Transformationen betrachtet, die auch eine Gruppe bilden. Diskrete Gruppen sind in der aktuellen Forschung in Kosmologie und Teilchenphysik sehr wichtig. Ein Verständnis der CP-Symmetrie wird als Schlüssel zum Verständnis der Existenz von Materie im Universum betrachtet!

7.3 Orthogonale Gruppe - Rotationsgruppe

Jetzt etwas formaler - aber wir werden diese Art später in der Relativitätstheorie benutzen und viel später in der Quantenfeldtheorie.

Das Euklidische Skalarprodukt in \mathbb{R}^n ist definiert als:

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \vec{x}^T \vec{y} = \vec{x}^T \mathbb{1}_n \vec{y}.$$

Definition: orthogonale Gruppe in n Dimensionen, $O(n)$

Menge aller linearen Transformationen \hat{A} , die das Euklidische Skalarprodukt

in \mathbb{R}^n invariant lassen, d.h. die Länge eines Vektors $\sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$ wird sich nicht unter der Transformation \hat{A} ändern und deshalb können diese Transformationen nur Rotationen des Vektors \vec{x} sein.

Invarianz des Skalarproduktes bedeutet

$$\langle \hat{A}\vec{x}, \hat{A}\vec{y} \rangle = (\hat{A}\vec{x})^T (\hat{A}\vec{y}) = \vec{x}^T \hat{A}^T \mathbb{1}_n \hat{A} \vec{y} = \vec{x}^T \vec{y} \Leftrightarrow \boxed{\hat{A}^T \mathbb{1}_n \hat{A} = \mathbb{1}_n}.$$

Damit erhalten wir als Definitionsgleichung für $O(n)$

$$O(n) = \{ \hat{A} \in GL(n, \mathbb{R}), \hat{A}\hat{A}^T = \hat{A}^T \hat{A} = \mathbb{1}_n \}. \quad (211)$$

Als Untergruppe von $O(n)$ erhalten wir die **spezielle orthogonale Gruppe** in n Dimensionen:

$$SO(n) = \{ \hat{A} \in GL(n, \mathbb{R}), \hat{A}\hat{A}^T = \hat{A}^T \hat{A} = \mathbb{1}_n, \det \hat{A} = 1 \}. \quad (212)$$

Folgende Drehmatrizen sind Elemente von $SO(3)$.

$$\begin{aligned} \hat{R}(\phi_3) &= \begin{pmatrix} \cos \phi_3 & \sin \phi_3 & 0 \\ -\sin \phi_3 & \cos \phi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \hat{R}(\phi_2) &= \begin{pmatrix} \cos \phi_2 & 0 & -\sin \phi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi_2 & 0 & \cos \phi_2 \end{pmatrix}, \\ \hat{R}(\phi_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_1 & \sin \phi_1 \\ 0 & -\sin \phi_1 & \cos \phi_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (213)$$

7.4 Unitäre Gruppe

Nun verallgemeinern wir unsere Überlegungen auf komplexe Zahlen. Die unitäre Gruppe in n Dimensionen ist definiert als die Menge aller linearen Transformationen \hat{A} , die das Euklidische Skalarprodukt in \mathbb{C}^n invariant lassen. Das Skalarprodukt in \mathbb{C}^n ist gegeben als:

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}, \quad (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1^* y_1 + x_2^* y_2 + \dots + x_n^* y_n = \vec{x}^\dagger \vec{y} = (\vec{x}^T)^* \mathbb{1}_n \vec{y}.$$

Invarianz des Skalarproduktes bedeutet

$$\boxed{\hat{A}^\dagger \mathbb{1}_n \hat{A} = \mathbb{1}_n}.$$

Damit erhalten wir als Definitionsgleichung für $U(n)$:

$$U(n) = \{ \hat{A} \in GL(n, \mathbb{C}), \hat{A}\hat{A}^\dagger = \hat{A}^\dagger \hat{A} = \mathbb{1}_n \}. \quad (214)$$

Als Untergruppe von $U(n)$ erhalten wir die **spezielle unitäre Gruppe** in n Dimensionen:

$$SU(n) = \{\hat{A} \in GL(n, \mathbb{C}), \hat{A}\hat{A}^\dagger = \hat{A}^\dagger\hat{A} = \mathbf{1}_n, \det \hat{A} = 1\}. \quad (215)$$

Die Gruppe $SU(N)$ wird sich als extrem wichtige Gruppe in der Physik rausstellen:

- Die grundlegenden **Symmetrien des Standardmodells der Teilchenphysik** lauten: $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.
- $SO(3)$ (Drehungen) ist *fast isomorph* zu $SU(2)$, d.h. die Isotropie des Raumes ist mit $SU(2)$ verbunden.
- In der Quantenmechanik werden Drehimpuls und Spin mit $SU(2)$ beschrieben.
- Die Lorentzgruppe (spezielle Relativitätstheorie) ist isomorph zu $SU(2) \times SU(2)$.

7.5 Darstellungen einer Gruppe

Eine **Darstellung (representation)** R einer Gruppe G ist eine Abbildung der Elemente von G in die Menge der linearen Operatoren D_R

$$g \mapsto D_R(g) \quad (216)$$

mit den folgenden Eigenschaften

1. $D(e) = \hat{1}$, i.e. der Einheitsoperator im Raum der linearen Operatoren.
2. $D(g_1)D(g_2) = D(g_1 \cdot g_2)$, d.h. die Struktur der Gruppenmultiplikation bleibt erhalten.

Bemerkung:

- a) Der Raum auf dem die Operatoren D_R wirken, heisst die **Basis** der Darstellung. Die **Dimension der Darstellung** ist die Dimension des Raumes auf dem die Darstellung wirkt.
- b) Oft sind Darstellungen D einfach Matrizen, aber es können auch komplizierte Objekte sein, wie z.B. Operatoren die auf dem unendlichdimensionalen Hilbert- oder Fock-Raum wirken.

- c) Die **triviale Darstellung** ist gegeben durch $D(g) = \mathbb{1}$, wobei $\mathbb{1}$ den Einheitsoperator in dem Raum darstellt, auf dem D wirkt.
- d) Zwei Darstellungen $D(g)$ und $D'(g)$ heissen **äquivalent**, wenn es eine Matrix S (unabhängig von g) gibt, so dass gilt

$$D'(g) = S^{-1}D(g)S \quad \forall g \in G. \quad (217)$$

- e) Eine Darstellung heisst **unitär** wenn alle $D(g)$ s unitär sind, d.h. $D(g)^\dagger D(g) = \mathbb{1}$.

Beispiel:

- Die Matrizen in Gl.(213) sind eine 3-dimensionale lineare Darstellung von $SO(3)$.

7.6 Lie-Algebra und Lie-Gruppen

Zu einer kontinuierlichen Gruppe (Gruppenelemente hängen von einem kontinuierlichen Parameter ab, z.B. Drehmatrizen hängen kontinuierlich vom Drehwinkel ab) mit den Gruppenelementen $D_R(\theta)$ gibt es eine Lie-Algebra, die durch sogenannte Generatoren definiert wird.

Definition: Generator einer Lie-Gruppe

Die Generatoren T_R^a einer kontinuierlichen Gruppe können aus einem Gruppenelement $D_R(\theta)$ abgeleitet werden, indem man infinitesimal kleine Abweichungen θ^a vom Einselement betrachtet:

$$D_R(\theta) \approx \mathbb{1} + i\theta_a T_R^a. \quad (218)$$

Der **Generator der Gruppe** in der Darstellung R kann dabei wie folgt bestimmt werden

$$T_R^a = -i \left. \frac{\partial D_R(\theta)}{\partial \theta_a} \right|_{\theta=0}. \quad (219)$$

Die Lie-Algebra wird durch die Vertauschungsrelationen der Generatoren definiert.

Definition: Lie-Algebra

$$\boxed{[T^a, T^b] = if_c^{ab} T^c}. \quad (220)$$

Diese Relation wird als **Lie-Algebra** der Gruppe bezeichnet. Die Generatoren T hängen von der Darstellung ab, die **Strukturkonstanten** nicht.

Strategie: wenn man z.B. alle zur Gruppe $SU(2)$ gehörigen Darstellungen finden will, dann startet man mit einer speziellen Darstellung der Gruppe, z.B. den 2×2 $SU(2)$ Matrizen und leitet daraus die Generatoren der zugehörigen $su(2)$ -Algebra ab. Danach bestimmt man die Vertauschungsrelationen dieser Generatoren und somit die Strukturkonstanten der Algebra. In diesem Fall wird das der totale antisymmetrische Tensor sein. Nun sucht man alle möglichen Darstellung der Lie-Algebra. Alle möglichen Darstellungen der Gruppe erhält man schlussendlich, indem man diese Algebra Darstellungen exponentiiert

$$\text{Group} = e^{i\text{Lie-Algebra}} . \quad (221)$$

7.7 $su(2)$ Lie-Algebra

Die $su(2)$ Lie-Algebra lautet

$$[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk}T_k , \quad (222)$$

mit dem total antisymmetrischen Tensor ϵ_{ijk} .

Folgende Objekte sind Beispiele für Darstellungen der $su(2)$ -Algebra:

1. 3-dimensionale Darstellung der $su(2)$:

Die Generatoren von Drehungen im 3-dimensionalen Raum können aus den Gleichungen (213) und (219) abgeleitet werden und lauten:

$$T_i := \frac{1}{\hbar}L_i , \quad (223)$$

$$L_1 = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad L_2 = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad L_3 = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (224)$$

$\Rightarrow e^3$ dim. Darstellung der $\mathfrak{su}(2)$ - Algebra = 3-dim. Darstellung der $SO(3)$.
Das deutet auf eine enge Verbindung von $SO(3)$ und $SU(2)$ hin!

2. 2-dimensionale Darstellung der $\mathfrak{su}(2)$:

Die **Pauli-Matrizen** lauten

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (225)$$

$T_i = \frac{\sigma_i}{2}$ erfüllt die $\mathfrak{su}(2)$ -algebra in Eq.(222).

Es gilt: e^2 -dim. Darstellung der $\mathfrak{su}(2) = SU(2)$: d.h. spezielle, unitäre 2×2 Matrizen

$$SU(2) = \{U : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 \text{ linear} \mid \det U = 1, U^\dagger U = 1\}. \quad (226)$$

3. ∞ -dimensionale Darstellung der $\mathfrak{su}(2)$:

In der Quantenmechanik werden Sie lernen, dass der Drehimpuls durch einen sogenannten Drehimpulsoperator beschrieben wird, welcher wie folgt definiert ist:

$$\hat{L} := \hat{x} \times \hat{p} = \frac{\hbar}{i} \hat{x} \times \hat{\nabla} \equiv \hat{L}_i = \frac{\hbar}{i} \epsilon_{ijk} \hat{x}_j \hat{\partial}_k. \quad (227)$$

Die Drehimpulsoperatoren \hat{L}_i erfüllen

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk} \hbar L_k.$$

$T_i = L_i/\hbar$ erfüllt damit die $\mathfrak{su}(2)$ Algebra.

4. Drehimpuls in der klassischen Mechanik:

Später werden wir in der Vorlesung die Poissonklammern definieren

$$\{f, g\} := \sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right). \quad (228)$$

Für die Drehimpulse in der der klassischen Mechanik erhalten wir

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k. \quad (229)$$

Es sieht also so aus, als ob der Übergang 'klassische Mechanik' \Rightarrow 'Quantenmechanik' durch das Ersetzen der Poisson-Klammern mit dem Kommutator erfolgt (und einem zusätzlichen Faktor $i\hbar$).

7.8 Verallgemeinerung: SU(N) und su(N) Lie-Algebra

Als nächstes betrachten wir die Gruppe SU(N), die durch $N \times N$ Matrizen gemäß Gl.(215) definiert sind. Aus den $2N^2 - N^2 - 1$ unabhängigen Elementen $U_a(\theta) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ der Gruppe SU(N) kann man $N^2 - 1$ Generatoren $T_a \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ableiten:

$$T_a := -i \left. \frac{\partial U_a}{\partial \theta} \right|_{\theta=0}. \quad (230)$$

Die Kommutatorrelationen dieser Generatoren definieren die Strukturkonstanten der su(N)-Algebra.

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c. \quad (231)$$

Bis jetzt sind diese Generatoren komplexe $n \times n$ -Matrizen. Im nächsten Schritt betrachten wir Gleichung (231) als Ausgangsdefinition für abstrakte, a priori nicht festgelegte Objekte T_a .

Definition: su(N) Lie-Algebra:

Die su(N) Lie-Algebra ist gegeben durch

$$\boxed{[T_a, T_b] = if_{abc}T_c}. \quad (232)$$

Schliesslich suchen wir verschiedene Darstellungen der su(N)-Algebra.

1. Triviale Darstellung:

$$T_a = 0 \Rightarrow U_a = 1. \quad (233)$$

2. Fundamentale Darstellung:

Hier betrachten wir die oben abgeleiteten Darstellungen als $N \times N$ Matrizen

$$T_a \in \mathbb{C}^{n \times n}. \quad (234)$$

Damit erhält man für die SU(N) Gruppenelemente U_a genau die Matrizen, mit denen wir ursprünglich gestartet sind.

3. Adjungierte Darstellung

Die adjungierte Darstellung der $\mathfrak{su}(N)$ kann direkt aus den Strukturkonstanten abgelesen werden und es handelt sich dabei um $N^2 - 1 \times N^2 - 1$ Matrizen.

$$\boxed{(T_a)_{ij} := -if_{aij}} \in \mathbb{C}^{(n^2-1) \times (n^2-1)}. \quad (235)$$

Betrachten sie als Beispiel $\mathfrak{su}(2)$:

$$(T_a)_{ij} := -i\epsilon_{aij} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}. \quad (236)$$

Es gilt

$$(T_1)_{ij} = -i\epsilon_{1ij} = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad ij = \begin{matrix} 23 \rightarrow 1 \\ 32 \rightarrow -1 \end{matrix}, \quad (237)$$

$$(T_2)_{ij} = -i\epsilon_{2ij} = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad ij = \begin{matrix} 31 \rightarrow 1 \\ 13 \rightarrow -1 \end{matrix}, \quad (238)$$

$$(T_3)_{ij} = -i\epsilon_{3ij} = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad ij = \begin{matrix} 12 \rightarrow 1 \\ 21 \rightarrow -1 \end{matrix}. \quad (239)$$

Die adjungierte Darstellung der $\mathfrak{su}(2)$ -Algebra wird also durch die Generatoren der $SO(3)$ gegeben, siehe Gleichung (213).

Bemerkungen:

- Das Standardmodell der Teilchenphysik wird durch drei Symmetriegruppen definiert. $SU(3)$, $SU(2)$ und $U(1)$.
- Die starke Wechselwirkung wird durch die Gruppe $SU(3)$ beschrieben. Die dreidimensionale fundamentale Darstellung beschreibt die Quarks mit 3 möglichen Farbladungen. Die achtdimensionale adjungierte Darstellung beschreibt die Gluonen mit 8 möglichen Farbladungen.
- Die schwache Wechselwirkung wird durch die Gruppe $SU(2)$ beschrieben. Die zweidimensionale fundamentale Darstellung beschreibt die Quarks und Leptonen mit 2 möglichen Ladungen (up oder down). Die dreidimensionale adjungierte Darstellung beschreibt die drei schwachen Eichbosonen Z^0, W^+, W^- .

- Die elektromagnetische Wechselwirkung wird durch die Gruppe $U(1)$ beschrieben. Die eindimensionale fundamentale Darstellung beschreibt die geladenen Teilchen. Die eindimensionale adjungierte Darstellung beschreibt das Photon.

7.9 Galilei-Invarianz

Wenn wir das Noether-Theorem beweisen, werden wir zeigen:

- Invarianz unter Zeittranslation \Rightarrow Energieerhaltung.
- Invarianz unter Raumtranslation \Rightarrow Impulserhaltung.
- Invarianz unter Raumdrehungen \Rightarrow Drehimpulserhaltung.

8 Phasenraum I

8. Vorlesung: Dienstag 8.11.2022 — [Scheck 1.15..1.16](#)

8.1 Phasenraum bei eindimensionaler Bewegung

Wir betrachten nun wieder eine eindimensionale Bewegung mit der Koordinate q , dem Impuls p und der Kraft $F(q)$. Diese Bewegung wird durch zwei Differentialgleichungen beschrieben

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{p}{m}, \\ \dot{p} &= F(q).\end{aligned}\tag{240}$$

Die Gesamtenergie E des Systems ist erhalten.

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{d(T + U)}{dt} = 0, \\ T &= \frac{m}{2}\dot{q}^2, \\ U(q) &= -\int_{q_0}^q F(q')dq' \Leftrightarrow F(q) = -\frac{dU(q)}{dq}.\end{aligned}\tag{241}$$

Dadurch bekommen wir sofort einen Zusammenhang zwischen \dot{q} und q

$$\dot{q} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(q)]},\tag{242}$$

bzw. zwischen dem Impuls p und der Koordinate q

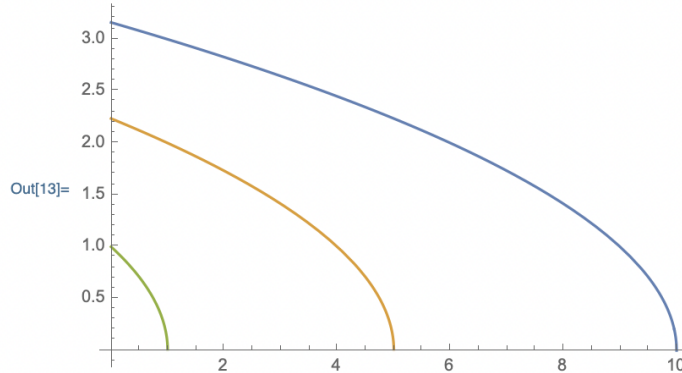
$$p = \pm\sqrt{2m[E - U(q)]}.\tag{243}$$

Diesen Zusammenhang zwischen Impuls und Koordinate betrachten wir nun an einem einfachen Beispiel: dem freien Fall im konstanten Gravitationsfeld mit $y_0 = h_0$ und $v_0 = 0$:

$$\begin{aligned}q = y &= h_0 - \frac{g}{2}t^2 = h_0 - \frac{g}{2}\left(-\frac{p}{mg}\right)^2, \\ p = m\dot{y} &= -mgt \Rightarrow t = -\frac{p}{mg}, \\ \Rightarrow p &= m\sqrt{2g(h_0 - q)}.\end{aligned}\tag{244}$$

Das gleiche Ergebnis erhalten wir aus Gl.(243) mit $E = mgh_0$ und $U(q) = mgq$. In der (q, p) Ebene sieht diese Bewegung folgendermassen aus.

```
In[13]:= Plot[{Sqrt[10 - q], Sqrt[5 - q], Sqrt[1 - q]}, {q, 0, 10}]
```



Für eindimensionale Systeme führen wir nun eine neue Schreibweise ein:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, \\ \vec{\mathcal{F}} &= \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \frac{p}{m} \\ F(q) \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (245)$$

Wir betrachten also einen zwei-dimensionalen Raum mit dem Rechtswert *Koordinate der Bewegung* und dem Hochwert *Impuls der Bewegung*. Dieser Raum wird **Phasenraum** genannt.

In unserer neuen Notation lauten die Bewegungsgleichungen

$$\dot{\vec{x}} = \vec{\mathcal{F}}(\vec{x}, t). \quad (246)$$

Die Lösungen $x_1(t) = \varphi(t)$ und $x_2(t) = m\dot{\varphi}(t)$ dieser Differentialgleichung sind die Phasenkurven $(\varphi(t), m\dot{\varphi}(t))$. Entlang einer Phasenkurve ist die Energie $E(p, q) = E(\varphi(t), m\dot{\varphi}(t))$ konstant.

Beachte: im Allgemeinen sind p und q unabhängige Variablen im Phasenraum. p wird nur entlang einer Lösungskurve der Bewegungsgleichungen eine Funktion von q .

8.2 Harmonischer Oszillator

Der harmonische Oszillator ist gegeben durch

$$\begin{aligned}F(q) &= -m\omega^2 q, \\ U(q) &= \frac{1}{2}m\omega^2(q^2 - q_0^2).\end{aligned}\quad (247)$$

Die Kraft ist also proportional zur Auslenkung und treibt den Massenpunkt immer wieder zum Ursprung zurück. Damit erhalten wir für den Zusammenhang von Impuls und Koordinate

$$\begin{aligned}
 p &= \pm\sqrt{2m[E - U(q)]} \\
 &= \pm\sqrt{2m\left[E - \frac{1}{2}m\omega^2(q^2 - q_0^2)\right]}, \\
 \Rightarrow p^2 &= 2m\left[E - \frac{1}{2}m\omega^2(q^2 - q_0^2)\right], \\
 \Rightarrow p^2 + m^2\omega^2q^2 &= 2mE + m^2\omega^2q_0^2.
 \end{aligned} \tag{248}$$

Dies scheint eine kreisartige Struktur in der (q, p) Ebene zu ergeben, die wir nun exakt herleiten.

In unserer formalen Schreibweise ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \vec{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, \\
 \vec{\mathcal{F}} &= \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \frac{p}{m} \\ F(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_2}{m} \\ -m\omega^2x_1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{249}$$

Damit lauten die Bewegungsgleichungen

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_2}{m} \\ -m\omega^2x_1 \end{pmatrix}. \tag{250}$$

Die Gesamtenergie ergibt sich zu

$$E = \frac{x_2^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2x_1^2. \tag{251}$$

Um E in eine einfache quadratische Form zu bringen definieren wir

$$\begin{aligned}
 z_1(\tau) &= \omega\sqrt{m}x_1(t), \\
 z_2(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{m}}x_2(t), \\
 \tau &= \omega t.
 \end{aligned} \tag{252}$$

Damit ergibt sich

$$2E = z_1^2 + z_2^2 = \text{const.} \tag{253}$$

Diese ist geometrisch ein Kreis in der $z_1 - z_2$ Ebene mit Radius $\sqrt{2E}$. Für die Bewegungsgleichungen ergibt sich in dieser Notation

$$\begin{pmatrix} \frac{dz_1}{d\tau} \\ \frac{dz_2}{d\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ -z_1 \end{pmatrix}. \quad (254)$$

Als Lösung können wir wie bekannt

$$\begin{aligned} z_1(\tau) &= A \cos(\tau - \varphi_0), \\ z_2(\tau) &= -A \sin(\tau - \varphi_0) \end{aligned} \quad (255)$$

ansetzen. Für die Energie erhalten wir damit

$$E = \frac{z_1^2}{2} + \frac{z_2^2}{2} = \frac{A^2}{2}. \quad (256)$$

Mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} z_1(\tau = 0) &= z_1^0, \\ z_2(\tau = 0) &= z_2^0, \end{aligned} \quad (257)$$

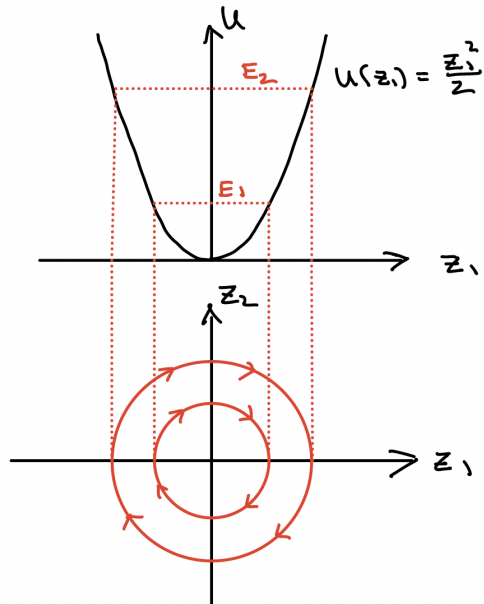
finden wir aus der Energieerhaltung

$$E = \frac{(z_1^0)^2}{2} + \frac{(z_2^0)^2}{2} = \frac{A^2}{2} \quad (258)$$

und damit $A = \sqrt{(z_1^0)^2 + (z_2^0)^2}$, sowie

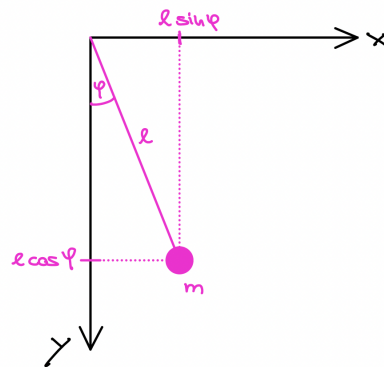
$$\begin{aligned} \cos(\varphi_0) &= \frac{z_1^0}{\sqrt{(z_1^0)^2 + (z_2^0)^2}}, \\ \sin(\varphi_0) &= \frac{z_2^0}{\sqrt{(z_1^0)^2 + (z_2^0)^2}}. \end{aligned} \quad (259)$$

Damit erhalten wir im Phasenraum (z_1, z_2) Kreise mit Radius $\sqrt{2E}$, die im Uhrzeigersinn durchlaufen werden.



8.3 Pendel im Schwerfeld

Als nächstes betrachten wir ein Pendel das aus einem Massenpunkt der Masse m besteht und an einem Faden der Länge l hängt. Der Auslenkungswinkel des Fadens im Vergleich zur Vertikalen wird mit φ bezeichnet (siehe Kap 2.2.2, Beispiel 1).



Die Maximalauslenkung des Pendels bezeichnen wir mit φ_0 . Damit lautet die Gesamtenergie des Massenpunktes

$$E = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos \varphi) = mgl(1 - \cos \varphi_0). \quad (260)$$

Den konstanten Energieanteil mgl könnten wir auch weglassen. Zur weiteren Vereinfachung definieren wir

$$\epsilon := \frac{E}{mgl} = \frac{l}{2g}\dot{\varphi}^2 + (1 - \cos \varphi) = 1 - \cos \varphi_0 \quad (261)$$

Mit $\omega^2 = g/l$ wird dies zu

$$\epsilon = \frac{\dot{\varphi}^2}{2\omega^2} + 1 - \cos \varphi \quad (262)$$

Weiter definieren wir

$$z_1 := \varphi, \quad z_2 := \frac{\dot{\varphi}}{\omega} \quad \text{mit } \tau := \omega t. \quad (263)$$

Damit lautet die Energiegleichung

$$\epsilon = \frac{z_2^2}{2} + 1 - \cos z_1 = 1 - \cos \varphi_0 \quad (264)$$

Wir erhalten nun folgende mögliche Fälle:

1. $\varphi_0 = 0 \Rightarrow \epsilon = 0$. Ist der maximale Auslenkwinkel Null, dann gibt es keine Bewegung und $\epsilon = 0$.
2. $\varphi_0 > 0$, klein $\Rightarrow \epsilon = \frac{\varphi_0^2}{2}$. Ist der maximale Auslenkwinkel größer als Null, aber klein, so kann eine Taylorentwicklung des Kosinus vorgenommen werden und wir erhalten das Ergebnis vom harmonischen Oszillator.
3. $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \epsilon = 1$. Bei einem maximalen Auslenkwinkel von 90 Grad wird $\epsilon = 1$.
4. $\varphi_0 = \pi \Rightarrow \epsilon = 2$. Ist der maximale Auslenkwinkel exakt gleich 180 Grad, dann wird $\epsilon = 2$. In diesem Fall geht die Geschwindigkeit gerade noch mal auf Null zurück und der obere Umkehrpunkt wird nur in unendlich langer Zeit erreicht: **Kriechfall**.

5. Wird die Energie weiter erhöht, d.h. $\epsilon > 2$, dann hat das Pendel auch am oberen Umkehrpunkt noch Energie und es rotiert durch.

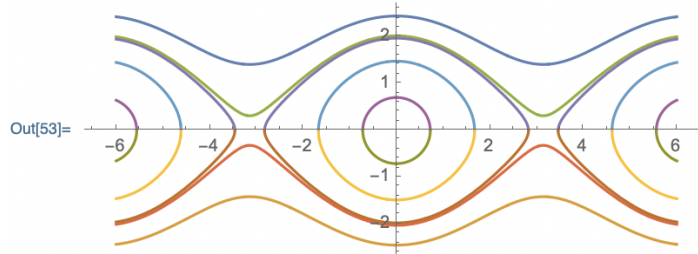
Die Bewegung im Phasenraum kann leicht aus Gl.(264) hergeleitet werden

$$z_2 = \pm \sqrt{2(\epsilon - 1 + \cos z_1)}. \quad (265)$$

```

ParametricPlot[{
  {phi, Sqrt[2 (3. - 1 + Cos[phi])]},
  {phi, -Sqrt[2 (3. - 1 + Cos[phi])]},
  {phi, Sqrt[2 (2.05 - 1 + Cos[phi])]},
  {phi, -Sqrt[2 (2.05 - 1 + Cos[phi])]},
  {phi, Sqrt[2 (1.95 - 1 + Cos[phi])]},
  {phi, -Sqrt[2 (1.95 - 1 + Cos[phi])]},
  {phi, Sqrt[2 (1.1 - 1 + Cos[phi])]},
  {phi, -Sqrt[2 (1.1 - 1 + Cos[phi])]},
  {phi, |Sqrt[2 (0.25 - 1 + Cos[phi])]|},
  {phi, -Sqrt[2 (0.25 - 1 + Cos[phi])]}], {phi, -6, 6]

```



Die Bahn für $\epsilon = 2$ trennt die oszillatorischen Lösungen von den rotatorischen, sie wird als **Separatrix** bezeichnet.

Die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned}
 ml\ddot{\varphi} &= -mg \sin \varphi, \\
 \frac{\ddot{\varphi}}{\omega^2} &= -\sin \varphi
 \end{aligned} \quad (266)$$

lautet in den neuen Koordinaten

$$\begin{pmatrix} \frac{dz_1}{d\tau} \\ \frac{dz_2}{d\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ -\sin z_1 \end{pmatrix}. \quad (267)$$

Im Grenzfall kleiner Auslenkungen gilt $\sin z_1 \approx z_1$ und wir erhalten das Ergebnis des harmonischen Oszillators von oben.

9 Phasenraum II und lineare Systeme

9. Vorlesung: Donnerstag 10.11.2022 — [Scheck 1.17...1.19, 1.14](#)

9.1 Phasenraum bei n Teilchen

Für ein n Teilchensystem definieren wir

$$\begin{aligned} x_1 &:= x^{(1)}, x_2 := y^{(1)}, x_3 := z^{(1)}, x_4 := x^{(2)}, \dots, x_{3n} := z^{(n)}, \\ x_{3n+1} &:= p_x^{(1)}, x_{3n+2} := p_y^{(1)}, x_{3n+3} := p_z^{(1)}, x_{3n+4} := p_x^{(2)}, \dots, x_{6n} := p_z^{(n)}, \end{aligned} \quad (268)$$

sowie

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{3n} \\ x_{3n+1} \\ x_{3n+2} \\ \dots \\ x_{6n} \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} p_x^{(1)}/m \\ p_y^{(1)}/m \\ \dots \\ p_z^{(n)}/m \\ F_x^{(1)} \\ F_y^{(1)} \\ \dots \\ F_z^{(n)} \end{pmatrix}. \quad (269)$$

Dieses System hat $3n$ Koordinaten oder Freiheitsgrade und der Phasenraum ist $6n$ dimensional.

Die Bewegungsgleichungen lauten dann wieder

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}, t). \quad (270)$$

Für Differentialgleichungen 1.Ordnung, in der Form von Gl.(270) kann man eine Reihe von Aussagen beweisen, die nicht von der Zahl der Koordinaten abhängen.

Wir hatten bisher gesehen, dass sich die Bahnen im Phasenraum nicht schneiden. Gäbe es einen Schnittpunkt, dann hätte das System in diesem Punkt die Möglichkeit für unterschiedliche zeitliche Entwicklungen!

Ein Punkt im Phasenraum, kann als Anfangsbedingung angesehen werden und diese legt eindeutig die zeitliche Weiterentwicklung fest.

Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen: Existenz und

Eindeutigkeit von Lösungen von Gl.(270):

Es sei $\vec{F}(\vec{x}, t)$ mit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$ stetig und bezüglich \vec{x} auch stetig differenzierbar.

Dann gibt es zu jedem Punkt $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$ und $t_0 \in \mathbb{R}$ eine Umgebung U von \vec{z} und ein Intervall I , sodass es für alle Punkte \vec{x}_0 aus U genau eine Kurve $\vec{x}(t, t_0, \vec{x}_0)$ mit t in I gibt, die folgende Bedingungen erfüllt:

i)

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{x}(t, t_0, \vec{x}_0) = \vec{F}[\vec{x}(t, t_0, \vec{x}_0), t] .$$

ii)

$$\vec{x}(t = t_0, t_0, \vec{x}_0) = \vec{x}_0 .$$

iii) $\vec{x}(t, t_0, \vec{x}_0)$ ist in t, t_0 und \vec{x}_0 stetig differenzierbar.

Bemerkungen:

- \vec{x}_0 ist der Anfangspunkt im Phasenraum, den das System zur Anfangszeit t_0 einnimmt.
- Die Lösung $\vec{x}(t, t_0, \vec{x}_0)$ heisst auch Integralkurve des Vektorfeldes \vec{F} .
- Man kann $\vec{F}(\vec{x}, t)$ als ein Vektorfeld verstehen, dass jedem \vec{x} einen Geschwindigkeitsvektor $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}, t)$ zuordnet. Das kann zur Konstruktion des Phasenraumes benutzt werden (die Geschwindigkeit ist die Tangente an die Bewegung oder numerisch).
- Systeme, die durch Gleichung (270) beschrieben werden sind endlich-dimensional. Der Phasenraum hat die Dimension $2f$, wobei f die Zahl der Freiheitsgrade ist.
- Systeme, die durch Gleichung (270) beschrieben werden sind differenzierbar, d.h. die Bewegungsgleichungen sind Differentialgleichungen.
- Systeme, die durch Gleichung (270) beschrieben werden sind deterministisch, d.h. Anfangsort und Anfangsgeschwindigkeit legen die Lösung (zumindest lokal) eindeutig fest. Insbesondere schneiden sich 2 Bahnkurven nicht!

Annahme: wir kennen alle Lösungen zu allen möglichen Anfangsbedingungen

$$\vec{x}(t, t_0, \vec{x}_0) \equiv \vec{\Phi}_{t, t_0}(\vec{x}_0). \quad (271)$$

Für die Abbildung $\vec{\Phi}_{t, t_0}$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \vec{x}_0 &\mapsto \vec{x} = \vec{\Phi}_{t, t_0}(\vec{x}_0). \end{aligned} \quad (272)$$

Bemerkungen:

- Die Abbildung $\vec{\Phi}_{t, t_0}$ ist eindeutig.
- Abbildung und Umkehrabbildung sind differenzierbar.
- Man nennt $\vec{\Phi}_{t, t_0}$ die **Strömung** oder den **Fluß** im Phasenraum \mathbb{R}^n .
- Wenn sich das System zur Zeit t_0 im Zustand \vec{x}_0 befindet, dann gibt $\vec{\Phi}_{t, t_0}$ an in welchem Zustand es sich zur Zeit t befindet.

Für die Hintereinanderausführung von zwei Abbildungen $\vec{\Phi}_{t_1, t_2}$ gilt

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}_{t, s} \circ \vec{\Phi}_{s, r} &= \vec{\Phi}_{t, r}, \\ \vec{\Phi}_{s, s} &= \underline{\mathbb{1}}. \end{aligned} \quad (273)$$

Weiterhin erhalten wir daur aus für die Zeitentwicklung

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\Phi}_{t, s} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\Phi}_{t, t+\epsilon} \circ \vec{\Phi}_{t+\epsilon, s} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{\Phi}_{t, s} \Big|_{s=t} \circ \vec{\Phi}_{t, s}. \quad (274)$$

Für autonome Systeme, d.h. Systeme bei denen $\vec{F}(\vec{x}, t)$ nicht explizit von der Zeit abhängt, gilt

$$\begin{aligned} \vec{x}(t+r, t_0+r, \vec{x}_0) &= \vec{x}(t, t_0, \vec{x}_0), \\ \vec{\Phi}_{t+r, t_0+r}(\vec{x}_0) &= \vec{\Phi}_{t, t_0}(\vec{x}_0) = \vec{\Phi}_{t-t_0}(\vec{x}_0). \end{aligned} \quad (275)$$

D.h. autonome Systeme sind invariant unter Zeittranslationen.

Beweis: es sei $t' = t + r$ und $s' = s + r$. Damit gilt $\partial/\partial t = \partial/\partial t'$.

Nach Gleichung (270) gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{x}(t+r = t', s+r = s', \vec{x}_0) = \vec{F}[\vec{x}(t', s', \vec{x}_0)] \quad (276)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\vec{x}(s', s', \vec{x}_0) = \vec{x}(s + r, s + r, \vec{x}_0) = \vec{x}_0. \quad (277)$$

Vergleicht man dies mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \vec{x}(t, s, \vec{x}_0) &= \vec{F}[\vec{x}(t, s, \vec{x}_0)], \\ \vec{x}(s, s, \vec{x}_0) &= \vec{x}_0, \end{aligned} \quad (278)$$

so stellt man fest, dass man diesselbe Anfangsbedingung hat, sowie diesselbe Zeitentwicklung $\vec{F}(\vec{x})$. Damit ergibt sich nach Existenz- und Eindeutigkeitsatz

$$\vec{x}(t + r, s + r, \vec{x}_0) = \vec{x}(t, s, \vec{x}_0), \quad (279)$$

Bei nicht autonomen Systeme, hätte man diesselbe Anfangsbedingung, aber eine unterschiedliche Zeitentwicklungsfunktion $\vec{F}(\vec{x}, t) \neq \vec{F}(\vec{x}, t')$.

□

Nimmt man die Zeitachse zum Phasenraum hinzu, so erhält man den erweiterten Phasenraum $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t$, welcher $2f - 1$ -dimensional ist.

Wie läuft die Bewegung im erweiterten Phasenraum ab? Beispiel harmonischer Oszillator? Spiralen...

9.2 Lineare Systeme

Scheck 1.20, Landau

9.2.1 Homogene Systeme

Wir betrachten nun den einfachen Fall $\vec{F} = \hat{A}\vec{x}$, mit $\hat{A} = \{a_{ik}\}$. Damit werden die Bewegungsgleichungen zu

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}, t) = \hat{A}\vec{x}, \quad (280)$$

oder in Koordinaten

$$\dot{x}_i = \sum_k a_{ik} x_k. \quad (281)$$

Als Beispiel hierfür kann man den harmonischen Oszillator anführen

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{m}x_2, \quad \dot{x}_2 = -m\omega^2x_1, \quad (282)$$

oder in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -m\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (283)$$

Die expliziten Lösungen können wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1^0 \cos \tau + x_2^0 \frac{1}{m\omega} \sin \tau, \\ x_2(t) &= -x_1^0 m\omega \sin \tau + x_2^0 \cos \tau, \end{aligned} \quad (284)$$

d.h. in Matrixschreibweise

$$\underline{\vec{x}} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \tau & \frac{1}{m\omega} \sin \tau \\ -m\omega \sin \tau & \cos \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} = \hat{M} \underline{\vec{x}}(t). \quad (285)$$

Mit $\tau = \omega(t - t_0)$ erhalten wir

$$\underline{\vec{x}}(t) \equiv \underline{\vec{x}}(t, t_0, \underline{\vec{x}}_0) = \underline{\vec{\Phi}}_{t, t_0}(\underline{\vec{x}}_0) = \hat{M}(t, t_0) \underline{\vec{x}}_0 \quad (286)$$

mit

$$\hat{M}(t, t_0) = \begin{pmatrix} \cos \omega(t - t_0) & \frac{1}{m\omega} \sin \omega(t - t_0) \\ -m\omega \sin \omega(t - t_0) & \cos \omega(t - t_0) \end{pmatrix}. \quad (287)$$

Wie es für ein autonomes System erwartet wird, hängt $\hat{M}(t, t_0)$ nur von der Differenz $t - t_0$ ab.

Beachte: $\det \hat{M}(t, t_0) = 1$.

10 Lineare Systeme

10. Vorlesung: Dienstag 15.11.2022 — [Scheck 1.20](#), [Landau](#)

10.1 Inomogene Systeme

Wir betrachten nun $\vec{\mathcal{F}} = \hat{A}\vec{x} + \vec{b}$.

Damit werden die Bewegungsgleichungen zu

$$\dot{\vec{x}} = \vec{\mathcal{F}}(\vec{x}, t) = \hat{A}\vec{x} + \vec{b}. \quad (288)$$

Als Beispiel hierzu kann die Lorentzkraft in homogenen elektrischen und magnetischen Feldern angeführt werden (siehe Übungsblatt 4).

$$\vec{F} = e\dot{\vec{r}} \times \vec{B} + e\vec{E}. \quad (289)$$

In unserer Notation gilt

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = p_x, x_5 = p_y, x_6 = p_z. \quad (290)$$

Legen wir das Magnetfeld in z -Richtung, so erhalten wir

$$\vec{B} = B\hat{e}_z \Rightarrow \dot{\vec{r}} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} \dot{y}B \\ -\dot{x}B \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (291)$$

Die Kraftgleichung lautet nun in Vektorschreibweise

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = eB \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}. \quad (292)$$

Damit gilt für den sechs-dimensionalen Phasenraumvektor

$$\dot{\vec{x}} = \hat{A}\vec{x} + \vec{b}, \quad (293)$$

mit

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = e \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \quad K = \frac{eB}{m}. \quad (294)$$

10.2 Wdh.: freie Schwingung

Ausgehend von der Bewegungsgleichung

$$\ddot{x}_1 = \frac{1}{m}\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 = -\omega^2 x_1 \quad (295)$$

und mit der vereinfachten Notation $x = x_1$, erhalten wir als allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t), \\ \dot{x}(t) &= \omega [-c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)], \\ \ddot{x}(t) &= -\omega^2 [c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)] = -\omega^2 x(t). \end{aligned} \quad (296)$$

Als alternative Lösungsform können wir

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos(\omega t + \alpha), \\ &= a \cos \alpha \cos(\omega t) - a \sin \alpha \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (297)$$

benutzen. Koeffizientenvergleich mit den ersten Lösungsansatz ergibt

$$\begin{aligned} c_1 &= a \cos \alpha, & \tan \alpha &= -\frac{c_2}{c_1}, \\ c_2 &= -a \sin \alpha, & a^2 &= c_1^2 + c_2^2. \end{aligned}$$

Die Gesamtenergie lautet

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2. \quad (298)$$

Als dritte Lösungsform geben wir

$$\begin{aligned} x(t) &= \Re(Ae^{i\omega t}), \quad \text{mit } A = ae^{i\alpha}, \\ &= \Re(ae^{i(\omega t + \alpha)}) = a \cos(\omega t + \alpha). \end{aligned} \quad (299)$$

Wir werden oft die dritte Form benutzen, da man mit Exponentialfunktionen besonders einfach rechnen kann.

10.3 Erzwungene Schwingung I

10.3.1 Allgemeine Lösung

Nun lassen wir noch eine zeitabhängige externe Kraft $F(t)$ auf den Oszillator wirken

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}, \quad (300)$$

mit $\omega_0^2 = k/m$. Die allgemeine Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung ist gleich der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung (siehe oben) plus einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung.

Für den Sonderfall einer periodischen externen Kraft

$$F(t) = f \cos(\omega_1 t + \beta) \quad (301)$$

setzen wir als spezielle Lösung an

$$\begin{aligned} x(t) &= b \cos(\omega_1 t + \beta), \\ \dot{x}(t) &= -b\omega_1 \sin(\omega_1 t + \beta), \\ \ddot{x}(t) &= -\omega_1^2 b \cos(\omega_1 t + \beta). \end{aligned} \quad (302)$$

Damit lautet die Bewegungsgleichung

$$(\omega_0^2 - \omega_1^2)b \cos(\omega_1 t + \beta) = \frac{F(t)}{m} = \frac{f}{m} \cos(\omega_1 t + \beta) \quad (303)$$

und für den Fall $\omega_0^2 \neq \omega_1^2$ erhalten wir

$$\Rightarrow b = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \omega_1^2)}. \quad (304)$$

Die allgemeine Lösung für den Fall $\omega_0^2 \neq \omega_1^2$ lautet somit

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega_0^2 - \omega_1^2)} \cos(\omega_1 t + \beta). \quad (305)$$

10.3.2 Resonanzfall

Für $\omega_0 \rightarrow \omega_1$ divergiert die Amplitude, dies ist der sogenannte **Resonanzfall**. Die Konstanten a und α sind durch die Anfangsbedingungen festgelegt.

$$x(0) = a \cos \alpha + b \cos \beta. \quad (306)$$

$$\dot{x}(0) = -a\omega_0 \sin \alpha - b\omega_1 \sin \beta. \quad (307)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos \alpha \cos(\omega_0 t) - a \sin \alpha \sin(\omega_0 t) + b \cos(\omega_1 t + \beta) \\ &= (x(0) - b \cos \beta) \cos(\omega_0 t) + \left(\frac{\dot{x}(0)}{\omega_0} + b \frac{\omega_1}{\omega_0} \sin \beta \right) \sin(\omega_0 t) \\ &\quad + b \cos(\omega_1 t + \beta) \\ &= x(0) \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \\ &\quad + b \left(\cos(\omega_1 t + \beta) - \cos \beta \cos(\omega_0 t) + \frac{\omega_1 - \omega_0 + \omega_0}{\omega_0} \sin \beta \sin(\omega_0 t) \right) \\ &= x(0) \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{x}(0) + b(\omega_1 - \omega_0) \sin \beta}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \\ &\quad + b [\cos(\omega_1 t + \beta) - \cos(\omega_0 t + \beta)]. \end{aligned} \quad (308)$$

Um das Verhalten bei $\omega_0 \rightarrow \omega_1$ zu bestimmen, können wir eine weitere allgemeine Lösung in der eben bestimmten Form

$$x(t) = a' \cos(\omega_0 t + \alpha') + \frac{f}{m(\omega_0^2 - \omega_1^2)} [\cos(\omega_1 t + \beta) - \cos(\omega_0 t + \beta)], \quad (309)$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_0^2 a' \cos(\omega_0 t + \alpha') - \frac{f}{m(\omega_0^2 - \omega_1^2)} [\omega_1^2 \cos(\omega_1 t + \beta) - \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \beta)]$$

hinschreiben. Damit gilt

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f(\omega_0^2 - \omega_1^2)}{m(\omega_0^2 - \omega_1^2)} \cos(\omega_1 t + \beta) = \frac{f}{m} \cos(\omega_1 t + \beta). \quad (310)$$

Beim Grenzwert $\omega_0 \rightarrow \omega_1$ gehen nun Zähler und Nenner des zweiten Termes von $x(t)$ in Gleichung (309) gegen Null. Daher wenden wir die L'Hospital Regel an

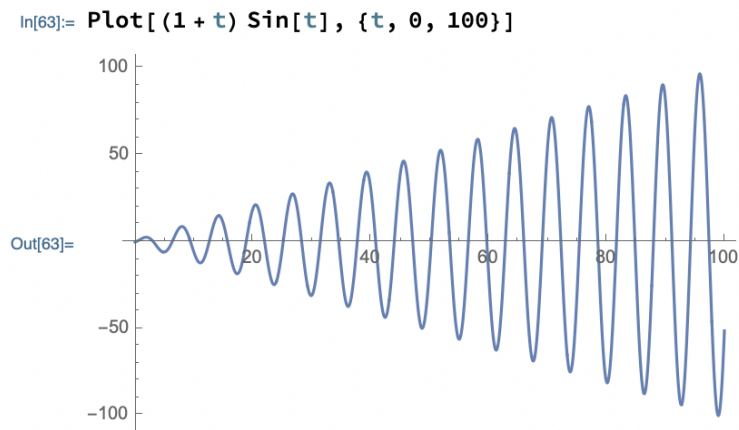
$$\begin{aligned} \lim_{\omega_1 \rightarrow \omega_0} \frac{\cos(\omega_1 t + \beta) - \cos(\omega_0 t + \beta)}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)} &= \frac{\frac{d}{d\omega_0} [\cos(\omega_1 t + \beta) - \cos(\omega_0 t + \beta)]|_{\omega_0=\omega_1}}{\frac{d}{d\omega_0} (\omega_0^2 - \omega_1^2)|_{\omega_0=\omega_1}} \\ &= \frac{t \sin(\omega_0 t + \beta)}{2\omega_0}, \end{aligned} \quad (311)$$

d.h. wir finden einen linearen Anstieg der Schwingungsamplitude, eine Divergenz!

$$x(t) = x(0) \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{x}(0) + \frac{f}{2m\omega_0} \sin \beta}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{f}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t + \beta). \quad (312)$$

Für den Sonderfall $x(0) = 0 = \beta$, ergibt sich

$$x(t) = \left(\frac{2m\dot{x}(0) + ft}{2m\omega_0} \right) \sin(\omega_0 t). \quad (313)$$



10.3.3 Verhalten in der Nähe der Resonanz

Eine Möglichkeit das System in der Nähe der Resonanz zu untersuchen, besteht darin die Lösung als komplexe Exponentialfunktion mit $\omega_1 = \omega_0 + \epsilon$ anzusetzen.

$$x(t) = \Re \{ A e^{i\omega_0 t} + B e^{i(\omega_0 + \epsilon)t} \} = \Re \{ (A + B e^{i\epsilon t}) e^{i\omega_0 t} \}, \quad (314)$$

mit $A = a e^{i\alpha}$ und $B = b e^{i\beta}$ und den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} x(0) &= \Re \{ A + B \} = \Re \{ a e^{i\alpha} + b e^{i\beta} \} = a \cos \alpha + b \cos \beta, \\ \dot{x}(0) &= \Re \{ i\omega_0 A + i(\omega_0 + \epsilon) B \} = -\omega_0 a \sin \alpha - (\omega_0 + \epsilon) b \sin \beta. \end{aligned} \quad (315)$$

Das sind diesselben Anfangsbedingungen wie oben.
 Zeige, dass der Exponentialansatz eine Lösung ist:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= -\omega_0^2 A e^{i\omega_0 t} - (\omega_0 + \epsilon)^2 B e^{i(\omega_0 + \epsilon)t} \\ &\quad + \omega_0^2 A e^{i\omega_0 t} + \omega_0^2 B e^{i(\omega_0 + \epsilon)t} \\ &= [\omega_0^2 - (\omega_0 + \epsilon)^2] B e^{i(\omega_0 + \epsilon)t} = \frac{f}{m} e^{i(\omega_0 + \epsilon)t} e^{i\beta}. \end{aligned} \quad (316)$$

Unter der Annahme $\epsilon \ll \omega_0$, kann in Gleichung (314) der Faktor $A + B e^{i\epsilon t}$ als kaum veränderliche Amplitude einer Schwingung mit der Frequenz ω_0 angesehen werden. Der Betrag dieser Amplitude lautet

$$\begin{aligned} C &= |A + B e^{i\epsilon t}| e^{i\phi_C(t)} = |a e^{i\alpha} + b e^{i\beta} e^{i\epsilon t}| e^{i\phi_C(t)}, \\ \Rightarrow |C|^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \cos(\epsilon t + \beta - \alpha). \end{aligned} \quad (317)$$

Die Amplitude schwankt daher periodisch mit der Frequenz ϵ zwischen den Grenzen

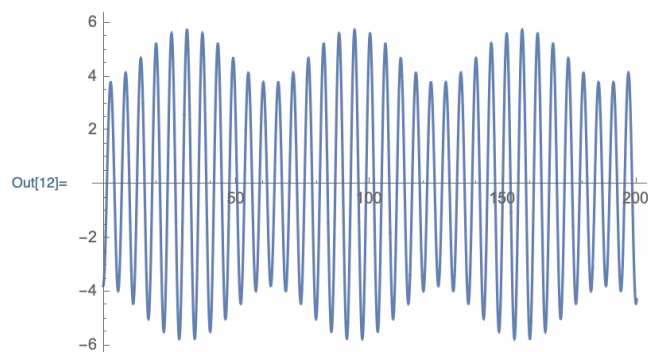
$$|a - b| \leq |C| \leq a + b. \quad (318)$$

Dieser Effekt heisst **Schwebung**.

```
In[11]:= F[om0_, om1_, t_] = Cos[om0 t] + 1 / (om0^2 - om1^2) Cos[om1 t]
```

```
Plot[F[1, 1.1, t], {t, 0, 200}]
```

```
Out[11]= Cos[om0 t] + Cos[om1 t] / (om0^2 - om1^2)
```



Betrachten wir denselben Sonderfall ($x(0) = 0$ und $\beta = 0$) wie bei der Untersuchung des Falles $\omega_0 = \omega_1$, dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
 a \cos \alpha &= -b, & a \sin \alpha &= -\frac{\dot{x}(0)}{\omega_0}, \\
 a &= \sqrt{b^2 + \frac{\dot{x}^2(0)}{\omega_0^2}} = b \sqrt{1 + \frac{\dot{x}^2(0)}{\omega_0^2 b^2}} \approx b + \frac{\dot{x}^2(0)}{2\omega_0^2 b} \\
 \tan \alpha &= \frac{\dot{x}(0)}{b\omega_0} \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha \rightarrow 0.
 \end{aligned} \tag{319}$$

Daher finden wir für die Amplitude

$$|C| \approx b\sqrt{2(1 + \cos(\epsilon t))} \in [0, 2b]. \tag{320}$$

Die vollständige Lösung lautet

$$x(t) = |C| \cos(\phi_C(t) + \omega_0 t). \tag{321}$$

Man kann auch zeigen

$$\sin(\alpha) + \sin(\alpha + \epsilon) = 2 \sin\left(\alpha + \frac{\epsilon}{2}\right) \cos\left(\frac{\epsilon}{2}\right). \tag{322}$$

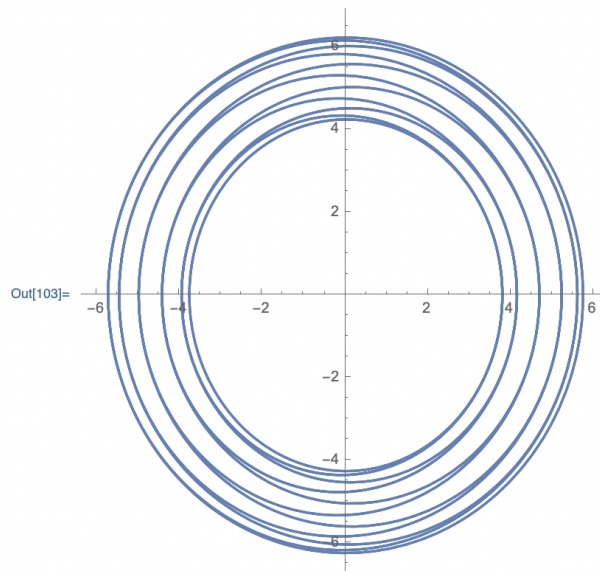
11 Lineare Systeme

11. Vorlesung: Freitag 18.11.2022 — [Scheck 1.26...1.28](#)

11.1 Erzwungene Schwingung II

Die erzwungene Schwingung sieht im Phasenraum im Falle der Schwebung wie folgt aus

```
In[102]:=
G[om0_, om1_, t_] = D[F[om0, om1, t], {t, 1}]
ParametricPlot[{F[1, 1.1, t], G[1, 1.1, t]}, {t, 0, 200}]
Out[102]= -om0 Sin[om0 t] -  $\frac{om1 \text{Sin}[om1 t]}{om0^2 - om1^2}$ 
```



Wir untersuchen nun den Fall einer allgemeinen Zeitabhängigkeit der externen Kraft und schreiben daher die Bewegungsgleichungen wie folgt um

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= \frac{F(t)}{m}, \\ \frac{d}{dt} \underbrace{(\dot{x} + i\omega_0 x)}_{\xi} - i\omega_0 \underbrace{(\dot{x} + i\omega_0 x)}_{\xi} &= \frac{F(t)}{m}, \\ \dot{\xi} - i\omega_0 \xi &= \frac{F(t)}{m}. \end{aligned} \quad (323)$$

Dies ist nun eine Gleichung erster Ordnung, allerdings ist nun die Koordinate ξ komplex, d.h. 2-dimensional.

Als Lösung der homogenen Gleichung erhalten wir

$$\xi(t) = Ae^{i\omega_0 t}. \quad (324)$$

Als spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung suchen wir

$$\xi(t) = A(t)e^{i\omega_0 t} \quad (325)$$

und finden

$$\begin{aligned} \dot{\xi} - i\omega_0 \xi &= \dot{A}(t)e^{i\omega_0 t} + i\omega_0 A(t)e^{i\omega_0 t} - i\omega_0 A(t)e^{i\omega_0 t} = \frac{F(t)}{m}, \\ \Rightarrow \dot{A}(t) &= \frac{F(t)}{m}e^{-i\omega_0 t} \Rightarrow A(t) = \int_0^t \frac{F(t')}{m}e^{-i\omega_0 t'} dt' + \xi_0. \end{aligned} \quad (326)$$

Somit lauten ξ und x

$$\begin{aligned} \xi &= e^{i\omega_0 t} \left[\int_0^t \frac{F(t')}{m} e^{-i\omega_0 t'} dt' + \xi_0 \right], \\ x = \frac{1}{\omega_0} \Im(\xi) &= \frac{1}{\omega_0} \Im \left\{ e^{i\omega_0 t} \left[\int_0^t \frac{F(t')}{m} e^{-i\omega_0 t'} dt' + \xi_0 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (327)$$

Bemerkung: bei erzwungenen Schwingungen ist die Energie nicht erhalten!

11.2 Gedämpfte Schwingung

Nun betrachten wir die Wirkung einer Reibungskraft, die proportional zur Geschwindigkeit ist und dieser entgegengerichtet ist.

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx - \alpha\dot{x}, \\ \ddot{x} + \underbrace{2\gamma}_{=\frac{\alpha}{m}} \dot{x} + \underbrace{\omega_0^2}_{=\frac{k}{m}} x &= 0. \end{aligned} \quad (328)$$

Setzen wir als Lösungselement

$$x = e^{rt} \quad (329)$$

an, so erhalten wir die charakteristische Gleichung

$$r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0, \quad (330)$$

mit den Lösungen

$$r_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (331)$$

Als allgemeine Lösungen von Gleichung (328) erhalten wir also

$$\begin{aligned} x &= c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \\ x(0) &= c_1 + c_2, \\ \dot{x}(0) &= c_1 r_1 + c_2 r_2, \\ c_1 &= \frac{r_2 x(0) - \dot{x}(0)}{r_2 - r_1} = -\frac{r_2 x(0) - \dot{x}(0)}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}, \\ c_2 &= \frac{\dot{x}(0) - r_1 x(0)}{r_2 - r_1} = -\frac{\dot{x}(0) - r_1 x(0)}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}. \end{aligned} \quad (332)$$

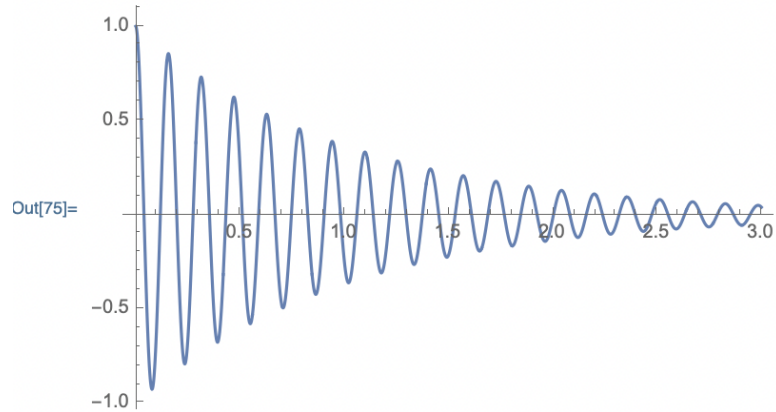
Wir können folgende Fälle unterscheiden:

i) $\gamma < \omega_0$: Nun können wir die Lösung wie folgt schreiben

$$\begin{aligned} x &= c_1 e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + c_2 e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \\ &= e^{-\gamma t} \left(c_1 e^{+i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t} + c_2 e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t} \right) \\ &= e^{-\gamma t} (c_1 e^{+i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}) \\ &= a e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \alpha), \end{aligned} \quad (333)$$

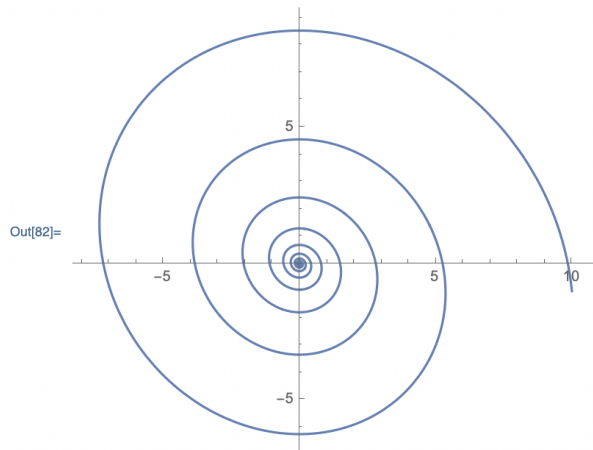
mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, $a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ und $\tan \alpha = -c_2/c_1$. Es handelt sich dabei um eine Oszillation mit der Frequenz $\omega < \omega_0$ und einer exponentiell abfallenden Amplitude $a e^{-\gamma t}$.

```
In[75]:= Plot[Exp[-t] Cos[40 t], {t, 0, 3}, PlotRange -> All]
```



Dies wird eine **gedämpfte Schwingung** genannt.
Im Phasenraum sieht die Bewegung wie folgt aus

```
In[82]:= ParametricPlot[{10 Exp[-t] Cos[10 t], - Exp[-t] Cos[10 t] + 10 Exp[-t] Sin[10 t]},  
{t, 0, 10}, PlotRange -> All]
```



ii) $\gamma > \omega_0$: Nun lautet die allgemeine Lösung

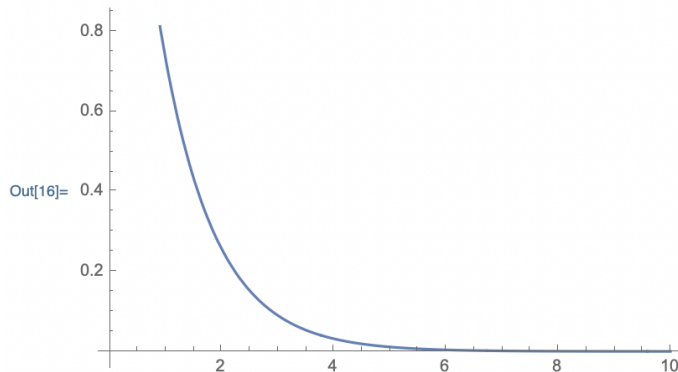
$$x = c_1 e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + c_2 e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \quad (334)$$

und wir finden keine Oszillation mehr, sondern ausschliesslich einen exponentiellen Abfall. Mann nennt dies **aperiodische Bewegung** oder

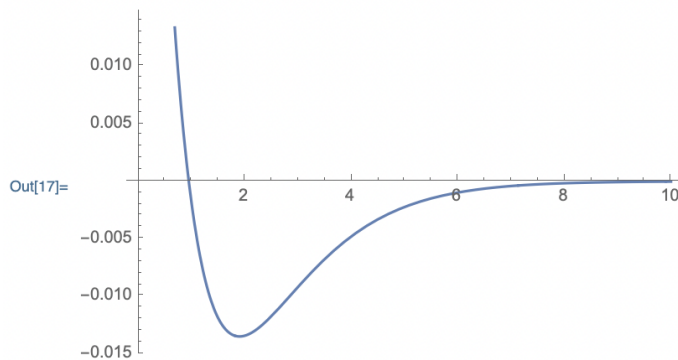
Kriechbewegung.

Abhängig von den Anfangsbewegungen finden wir aber auch noch die Möglichkeit eines Nulldurchganges.

```
In[16]:= Plot[1.1 Exp[-1.1 t] + 1.0 Exp[-1.0 t], {t, 0, 10}]
```



```
In[17]:= Plot[1.1 Exp[-1.1 t] - 1.0 Exp[-1.0 t], {t, 0, 10}]
```



iii) $\gamma = \omega_0$: **aperiodischer Grenzfall.**

Hier gibt es nur eine Wurzel der charakteristischen Gleichung (330). In diesem Fall können wir als Lösung ansetzen

$$x = (c_1 + c_2 t) e^{-\gamma t}. \quad (335)$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (-\gamma c_1 - \gamma c_2 t + c_2) e^{-\gamma t}, \\ \ddot{x} &= (\gamma^2 c_1 + \gamma^2 c_2 t - 2\gamma c_2) e^{-\gamma t} \end{aligned} \quad (336)$$

und somit

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \gamma^2x &= (\gamma^2c_1 + \gamma^2c_2t - 2\gamma c_2 \\ &\quad - 2\gamma^2c_1 - 2\gamma^2c_2t + 2c_2\gamma \\ &\quad + \gamma^2c_1 + \gamma^2c_2) e^{-\gamma t} = 0. \end{aligned} \quad (337)$$

Auch im Falle von Reibung gibt es keine Energieerhaltung, weiter ist der Fall von Reibung nicht zeitinvariant.

11.3 Erzwungene Schwingung mit Reibung

Schließlich betrachten wir den Fall

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{f}{m} \cos(\omega_1 t). \quad (338)$$

Die allgemeine Lösung dieser inhomogenen Gleichung besteht wieder aus der Summe von der allgemeinen homogenen Lösung und einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung.

Die homogene Gleichung wurde im vorherigen Kapitel 11.2 zu

$$x_h = ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \alpha), \quad (339)$$

mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, bestimmt.

Um eine partikuläre Lösung zu bestimmen verwenden wir die komplexe Schreibweise

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{f}{m} e^{i\omega_1 t} \quad (340)$$

und machen den Ansatz

$$x(t) = Be^{i\omega_1 t}. \quad (341)$$

Wir suchen also nach einer Lösung die sich mit der Frequenz der externen Anregung bewegt. Damit gilt

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= i\omega_1 B e^{i\omega_1 t}, \\ \ddot{x}(t) &= -\omega_1^2 B e^{i\omega_1 t} \end{aligned} \quad (342)$$

und somit erhalten wir eine partikuläre Lösung, wenn für die Amplitude B folgende Relation gilt

$$\begin{aligned} -\omega_1^2 B + 2\gamma i \omega_1 B + \omega_0^2 B &= \frac{f}{m}, \\ B &= \frac{f}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_1^2 + 2\gamma i \omega_1} = \frac{f}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega_1^2 - 2\gamma i \omega_1}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_1^2}. \end{aligned} \quad (343)$$

Wir können diese Amplitude auch in der Form

$$B = b e^{i\delta} \quad (344)$$

schreiben, mit

$$\begin{aligned} b &= \frac{f}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_1^2}}, \\ \tan \delta &= \frac{2\omega_1 \gamma}{\omega_1^2 - \omega_0^2}. \end{aligned} \quad (345)$$

Damit finden wir als allgemeine Lösung

$$x = a e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \alpha) + b \cos(\omega_1 t + \delta). \quad (346)$$

Bemerkung:

- Die homogene Lösung nimmt exponentiell mit der Zeit ab, d.h. irgendwann ist nur noch der zweite Summand effektiv vorhanden.
- Die Amplitude b divergiert nun nicht mehr für $\omega_1 \rightarrow \omega_0$ und wir erhalten den endlichen Wert

$$b(\omega_1 = \omega_0) = \frac{f}{2m\gamma\omega_0}. \quad (347)$$

- Das Maximum der Amplitude b finden wir für

$$\begin{aligned} \frac{db}{d\omega_1} &= -\frac{1}{2} \frac{f}{m} \frac{2(\omega_0^2 - \omega_1^2)(-2\omega_1) + 8\gamma^2 \omega_1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_1^2}^3} = 0, \\ \Leftrightarrow & -\omega_0^2 + \omega_1^2 + 2\gamma^2 = 0, \\ \Leftrightarrow & \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}. \end{aligned} \quad (348)$$

Durch die Reibung wird das Maximum der Resonanz von ω_0 nach $\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$ verschoben. An dieser Stelle besitzt b den Wert

$$b(\omega_1^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2) = \frac{f}{m} \frac{1}{\sqrt{4\gamma^4 + 4\gamma^2\omega_0^2 - 8\gamma^4}} = \frac{f}{2m\gamma} \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}. \quad (349)$$

- Für die Phase δ in der partikulären Lösung gilt bei $\omega_1 \rightarrow \omega_0$

$$\tan \delta = \frac{2\omega_1\gamma}{\omega_1^2 - \omega_0^2} \rightarrow \infty \Rightarrow \delta = \pm 90^\circ. \quad (350)$$

In diesem Falle stellt die Divergenz kein Problem dar, sie liefert lediglich eine Phase von $\pm 90^\circ$, die ja keineswegs unphysikalisch ist.

- Für $\omega_1 = \omega_0 + \epsilon$ (mit $\epsilon \rightarrow 0$) finden wir

$$B = -\frac{f}{2m\omega_0(\epsilon - i\gamma)} = Be^{i\delta},$$

$$b = \frac{f}{2m\omega_0\sqrt{\epsilon^2 + \gamma^2}}, \quad \tan \delta = \frac{\gamma}{\epsilon}. \quad (351)$$

Die Schwingung ist gegenüber der Anregung verzögert, d.h. δ ist immer negativ. Daraus folgt bei positivem ϵ ist $\tan \delta$ positiv und δ muss daher im dritten Quadranten liegen, während bei negativem ϵ der Winkel δ im vierten Quadranten liegt.

Für Phasenraumbilder siehe z. B.

https://itp.tugraz.at/LV/schnizer/Analytische_Mechanik/node5.html

11.4 Einschub: Konservative Kraftfelder

Übungsblatt 2 Aufgabe 3

Definition: Konservative Kräfte (=Potentialkräfte) sind solche, die als Gradientenfeld einer zeitunabhängigen potentiellen Energie geschrieben werden können.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U(\vec{r}). \quad (352)$$

Die ist gleichbedeutend mit den Aussagen

1. Die von der Kraft geleistete Arbeit entlang eines Wegs von \vec{r}_0 nach \vec{r} hängt nur von Anfangs- und Endpunkt ab, und ist unabhängig von der Form des Weges.
2. Das Wegintegral

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}' = -[U(\vec{r}) - U(\vec{r}_0)] \quad (353)$$

hängt nur von \vec{r}_0 und \vec{r} ab.

3. Das Wegintegral

$$\oint_{\tau} \vec{F} \cdot d\vec{r}' = 0 \quad (354)$$

über einen geschlossenen Weg τ verschwindet.

Für eine zweifach differenzierbare Funktion $U(x, y)$ gilt

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}, \quad (355)$$

damit folgt für die aus U abgeleitete Kraft

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad (356)$$

und dies gilt auch für die Kombinationen (x, z) und (y, z) . Somit erhalten wir

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \vec{0}. \quad (357)$$

Nach dem Stoke'schen Satz gilt

$$\oint_{\tau} \vec{F} \cdot d\vec{r}' = \int \int (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{A} = 0. \quad (358)$$

Beispiel: für eine Zentralkraft $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{r}$ gilt

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})_x = \left[\vec{\nabla} \times (f(r)\vec{r}) \right]_x = \frac{\partial}{\partial y}[f(r)z] - \frac{\partial}{\partial z}[f(r)y] = \frac{\partial f}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial y} z - \frac{\partial r}{\partial z} y \right) = 0. \quad (359)$$

12 d'Alembert-Prinzip

12. Vorlesung: Dienstag 22.11.2022 — [Scheck 2.1...](#)

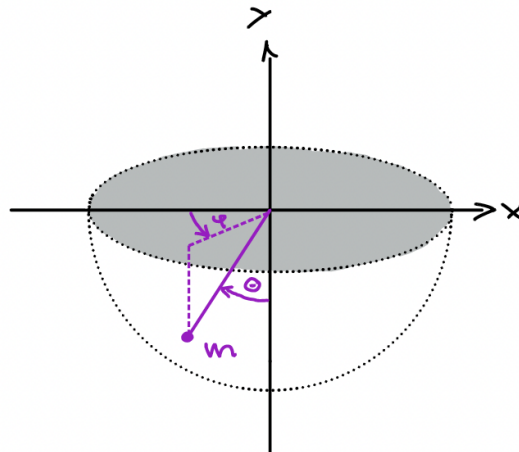
12.1 Zwangsbedingungen und verallgemeinerte Koordinaten

12.1.1 Definition von Zwangsbedingungen

Können sich die Massenpunkte eines Systems nicht völlig unabhängig voneinander bewegen, dann spricht man von Zwangsbedingungen.

Beispiele:

1. Ebenes (d.h. Bewegung nur in $x-z$ -Ebene) Pendel an Faden konstanter Länge - hier wird aus einem dreidimensionalen Problem mit drei freien Koordinaten (x, y, z) ein eindimensionales Problem mit einer freien Koordinate (θ).



2. Kugel bewegt sich in einer Kugelschale - hier wird aus einem dreidimensionalen Problem mit drei freien Koordinaten (x, y, z) ein zweidimensionales Problem mit zwei freien Koordinaten (φ, θ) .

Zwangsbedingungen reduzieren die Zahl der Freiheitsgrade und verändern somit die Bewegungsgleichungen.

Wir betrachten ein n -Teilchensystem, in dem die Koordinaten der einzelnen Teilchen durch die Ortsvektoren $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ beschrieben und die Geschwindigkeiten durch $\dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \dots, \dot{\vec{r}}_n$.

Wir führen folgende Definitionen ein:

- **Holonome (ganzgesetzliche) Zwangsbedingungen** können durch unabhängige Gleichungen in der Form geschrieben

$$f_\lambda(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t) = 0, \quad \lambda = 1, 2, \dots, \Lambda. \quad (360)$$

Unabhängig bedeutet, dass in jedem Punkt $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n)$ und für alle t der Rang der Ableitungsmatrix $\partial f_\lambda / \partial \vec{r}_i$ gleich Λ ist.

Beispiele:

1. Ebenes Pendel an Faden konstanter Länge:

$$\begin{aligned} f_1 &= r - l = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - l = 0, \\ f_2 &= \varphi - \varphi_0 = \arctan \frac{y}{x} - \varphi_0 = 0. \end{aligned} \quad (361)$$

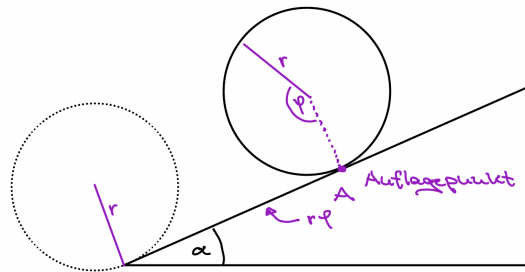
In diesem Fall ist $\Lambda = 3$. Ohne Zwangsbedingungen ist die Zahl der Freiheitsgrade gleich $f = 3$, mit Zwangsbedingungen ist die Zahl der Freiheitsgrade gleich $\bar{f} = 3 - \Lambda = 1$. Aus einem dreidimensionalen Problem mit drei freien Koordinaten (x, y, z) wird ein eindimensionales Problem mit einer freien Koordinate (θ) .

2. Kugel bewegt sich in einer Kugelschale:

$$f_1 = r - l = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - l = 0. \quad (362)$$

In diesem Fall ist $\Lambda = 1$. Ohne Zwangsbedingungen ist die Zahl der Freiheitsgrade gleich $f = 3$, mit Zwangsbedingungen ist die Zahl der Freiheitsgrade gleich $\bar{f} = 3 - \Lambda = 2$. Hier wird aus einem dreidimensionalen Problem mit drei freien Koordinaten (x, y, z) ein zweidimensionales Problem mit zwei freien Koordinaten (φ, θ) .

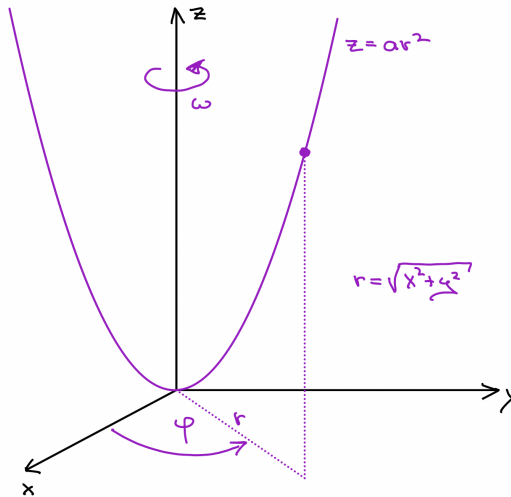
3. Rollende Scheibe: Eine Scheibe mit Radius r rollt ohne Schlupf auf einer geneigten Geraden. Betrachte die Bewegung nur in der (x, y) Ebene.



Ohne Zwangsbedingungen benötigt man drei Koordinaten, um die Lage der Scheibe in der (x, y) -Ebene eindeutig festzulegen: die Koordinaten des Scheibenmittelpunktes (x_M, y_M) und den Drehwinkel der Scheibe φ . Beim Rollen ohne Schlupf ist der Auflagepunkt A einzig durch den Drehwinkel φ festgelegt. Die Zwangsbedingungen lauten

$$\begin{aligned} f_1 &= x_A - r\varphi \cos \alpha = 0, \\ f_2 &= y_A - r\varphi \sin \alpha = 0. \end{aligned} \quad (363)$$

4. Perle auf gebogenem rotierendem Draht: auf einem parabelförmigen Draht der sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z -Achse dreht, sitzt eine Perle.



Die Zwangsbedingungen lauten:

$$\begin{aligned} f_1 &= \varphi - \omega t = 0, \\ f_2 &= z - ar^2 = 0. \end{aligned} \quad (364)$$

Damit kann die Position der Perle durch eine einzige Koordinate, z.B. r beschrieben werden.

5. Dreiteilchensystem mit starren Abständen

$$\begin{aligned} f_1 &= |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - a_1 = 0, \\ f_2 &= |\vec{r}_2 - \vec{r}_3| - a_2 = 0, \\ f_3 &= |\vec{r}_1 - \vec{r}_3| - a_3 = 0. \end{aligned} \quad (365)$$

In diesem Fall ist $\Lambda = 3$. Ohne Zwangsbedingungen ist die Zahl der Freiheitsgrade gleich $f = 3n = 9$, mit Zwangsbedingungen ist die Zahl der Freiheitsgrade gleich $\bar{f} = 3n - \Lambda = 6$.

- **Nichtholonome Zwangsbedingungen** können nicht in der Form von Gleichung (360) geschrieben werden.

– Es gibt Zwangsbedingungen, die sich nur durch Ungleichungen ausdrücken lassen, z.B. ein Teilchen rutscht eine Kugeloberfläche hinunter und sobald seine Geschwindigkeit hoch genug ist, hebt es

wegen der Zentrifugalkraft ab. Die Zwangsbedingung sieht dann wie folgt aus

$$r^2 - R^2 \leq 0. \quad (366)$$

- Eine andere wichtige Klasse von nicht-holonomen Zwangsbedingungen, sind solche die sich in differentieller Form schreiben lassen

$$\sum_{i=1}^n \vec{w}_i^k(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) \cdot d\vec{r}_i = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \Lambda. \quad (367)$$

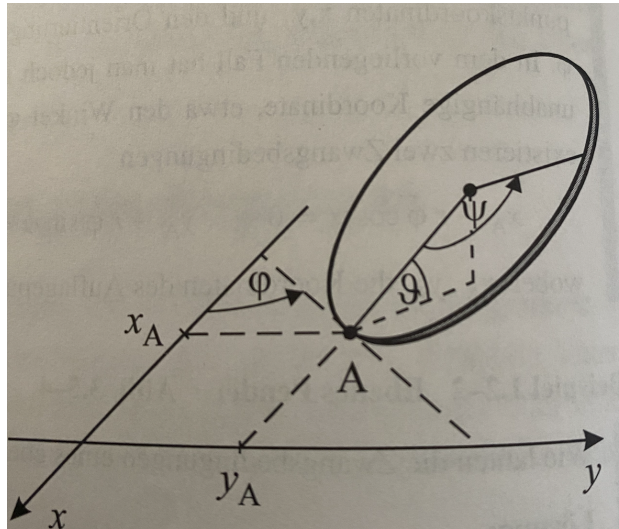
Man beachte, dass holonome Zwangsbedingungen immer in dieser differentiellen Form geschrieben werden können, aber nicht umgekehrt

$$\begin{aligned} f_\lambda(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t) &= 0, \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n \vec{\nabla}_i f_\lambda(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t) \cdot d\vec{r}_i &= 0. \end{aligned} \quad (368)$$

Nicht-holonome Zwangsbedingungen können also nicht auf die Form der holonomen Zwangsbedingungen integriert werden, sie schränken die Bewegungen im Kleinen ein, verringern aber im Allgemeinen nicht die Zahl der Freiheitsgrade.

Beispiel: dreidimensionale Bewegung einer Kreisscheibe, die ohne Schlupf auf der (x, y) -Ebene rollt. Das Problem wird durch folgende Koordinaten bestimmt:

1. (x_A, y_A) Auflagepunkt
2. Winkel φ zwischen der x -Achse und der Schnittlinie von Boden und Scheibenebene
3. Neigungswinkel θ
4. Rollwinkel ψ



Wir werden im wesentlichen nur holonome Zwangsbedingungen untersuchen.

- In beiden Fällen unterscheiden wir **rheonome** (=zeitabhängige“) und **skleronome** (=nicht explizit zeitabhängige“) Zwangsbedingungen.

12.1.2 Generalisierte Koordinaten

Generalisierte Koordinaten sind unabhängige Koordinaten, die die Zwangsbedingungen bereits berücksichtigen.

Ausgehend von den Koordinaten $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ für ein n -Teilchen-system bezeichnen wir nun die generalisierten Koordinaten mit q_i :

$$\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n\} \rightarrow \{q_1, q_2, \dots, q_f\}, \quad f = 3n - \Lambda. \quad (369)$$

Ziel:

- Bestimme Zahl der Freiheitsgrade
- Finde geeignete generalisierte Koordinaten, die die Zwangsbedingungen beinhalten.
- Finde allgemeine Prinzipien, aus denen direkt die Bewegungsgleichungen in den generalisierten Koordinaten aufgestellt werden können.

1. Schritt hierzu: d'Alembertsches Prinzip

12.2 d'Alembertsches Prinzip

Wir betrachten ein System von n Massenpunkten mit den Massen m_i und den Koordinaten \vec{r}_i , $i = 1, 2, \dots, n$, das den holonomen Zwangsbedingungen

$$f_\lambda(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t) = 0, \quad \lambda = 1, 2, \dots, \Lambda \quad (370)$$

ausgesetzt ist.

12.2.1 Virtuelle Verrückungen

Eine **relle Verrückung** $\{d\vec{r}_i\}$ ist eine infinitesimale Bewegung im Zeitintervall dt . Es handelt sich hierbei um eine relle Bewegung.

Eine **virtuelle Verrückung** $\{\delta\vec{r}_i\}$ ist eine infinitesimale Änderung der Koordinaten zu einem festen Zeitpunkt, die mit den Kräften und Zwangsbedingungen vereinbar ist (z.B. geometrische Randbedingungen). Es handelt sich hierbei um keine relle Bewegung, sondern um eine gedachte Verrückung.

Nicht ganz funktionierende Analogie: Wackeln an einem Fachwerkhaus, das zwischen anderen Gebäuden eingebaut werden muss. An den Berührungspunkten oder Auflagepunkten verschwinden die virtuellen Verrückungen, da die geometrischen Randbedingungen eingehalten werden müssen.

12.2.2 Statischer Fall

Wir bezeichnen die auf ein Teilchen i wirkende Gesamtkraft als \vec{F}_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Im Gleichgewichtsfall gilt

$$\vec{F}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (371)$$

Man kann sich nun vorstellen, dass die Zwangsbedingungen durch zusätzliche Kräfte \vec{Z}_i (**Zwangskräfte**) auf das Teilchen i realisiert werden. Die Gesamtkraft setzt sich dann zusammen aus Zwangskraft und aus der wirklichen (dynamischen) Kraft \vec{K}_i .

$$\vec{F}_i = \vec{K}_i + \vec{Z}_i. \quad (372)$$

Damit können wir folgern

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_i &= 0, \\
 \Rightarrow \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i &= 0, \\
 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i &= 0, \\
 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \left(\vec{K}_i + \vec{Z}_i \right) \cdot \delta\vec{r}_i &= 0. \tag{373}
 \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck wird auch **virtuelle Arbeit** genannt.

Postulat: die virtuelle Arbeit der Zwangskräfte ist gleich Null, d.h.

$$\sum_{i=1}^n \vec{Z}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0. \tag{374}$$

Dann folgt

$$\sum_{i=1}^n \vec{K}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0. \tag{375}$$

Im Gegensatz zu Gleichung (373) müssen nun nicht die einzelnen Summanden verschwinden. Die $\delta\vec{r}_i$ sind nicht unabhängig, sie müssen mit den Zwangsbedingungen verträglich sein.

12.2.3 Dynamischer Fall

Im dynamischen Fall gilt $\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i$ und somit

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i &= 0, \\
 \Rightarrow \left(\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i \right) \cdot \delta\vec{r}_i &= 0, \\
 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \left(\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i \right) \cdot \delta\vec{r}_i &= 0, \\
 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \left(\vec{K}_i + \vec{Z}_i - \dot{\vec{p}}_i \right) \cdot \delta\vec{r}_i &= 0. \tag{376}
 \end{aligned}$$

Ist die virtuelle Arbeit der Zwangskräfte gleich Null, d.h. $\sum_{i=1}^n \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$ dann folgt

$$\sum_{i=1}^n \left(\vec{K}_i - \dot{\vec{p}}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (377)$$

Wie oben sind nun die einzelnen Summanden nicht notwendigerweise Null.

Ausgehend von der letzten Gleichung wollen wir nun Bewegungsgleichungen in den unabhängigen generalisierten Koordinaten aufstellen:

Die Zwangsbedingungen in Gleichung (360) sind unabhängig und können daher lokal nach den Koordinaten \vec{r}_i aufgelöst werden:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_f, t), \quad (378)$$

mit $i = 1, \dots, n$, den generalisierten Koordinaten q_k und $f = 3n - \Lambda$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \vec{v}_i &= \frac{d}{dt} \vec{r}_i = \sum_{k=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}, \\ \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} &= \frac{\partial \vec{r}_i / \partial t}{\partial q_k / \partial t} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k}, \\ \delta \vec{r}_i &= \sum_{k=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k. \end{aligned} \quad (379)$$

In der letzten Gleichung tritt keine explizite Zeitableitung auf, weil die virtuellen Verrückungen nicht von der Zeit abhängen.

Damit finden wir

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \vec{K}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{i=1}^n \vec{K}_i \cdot \sum_{k=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^f \left(\sum_{i=1}^n \vec{K}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k \\ &= \sum_{k=1}^f Q_k \delta q_k, \end{aligned} \quad (380)$$

mit der **verallgemeinerten Kraft**

$$Q_k = \sum_{i=1}^n \vec{K}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}. \quad (381)$$

Weiter gilt

$$\sum_{i=1}^n \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \sum_{k=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k. \quad (382)$$

Dies kann wie folgt weiter vereinfacht werden

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} &= \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} &= \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} \end{aligned} \quad (383)$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{i=1}^n m_i \sum_{k=1}^f \left(\frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \sum_{k=1}^f \left(\frac{d}{dt} \left(\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k \\ &= \sum_{k=1}^f \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \vec{v}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \vec{v}_i^2 \right) \delta q_k \\ &= \sum_{k=1}^f \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} T \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} T \right) \delta q_k, \end{aligned} \quad (384)$$

mit der **kinetischen Energie**

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \vec{v}_i^2 \quad (385)$$

Setzen wir nun alles zusammen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n \left(\vec{K}_i - \dot{\vec{p}}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i \\ &= \sum_{k=1}^f \left[Q_k - \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} T \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} T \right) \right] \delta q_k. \end{aligned} \quad (386)$$

Da nun die δq_k unabhängig sind, gilt, dass die einzelnen Summanden verschwinden müssen, d.h.

$$Q_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} T \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} T. \quad (387)$$

12.3 Lagrange Gleichungen

Nehmen wir weiter an, dass die Kräfte \vec{K}_i Potentialkräfte sind, d.h.

$$\vec{K}_i = -\vec{\nabla}_i U, \quad (388)$$

dann gilt für die verallgemeinerten Kräfte

$$\begin{aligned} Q_k &= \sum_{i=1}^n \vec{K}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \\ &= -\sum_{i=1}^n \vec{\nabla}_i U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \\ &= -\frac{\partial}{\partial q_k} U(q_1, q_2, \dots, q_f). \end{aligned} \quad (389)$$

Damit ergibt sich

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} T \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} (T - U) = 0. \quad (390)$$

Da U nicht von \dot{q}_k abhängt, können wir auch schreiben

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (T - U) \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} (T - U) = 0. \quad (391)$$

Wir definieren nun die **Lagrange-Funktion**

$$L(q_k, \dot{q}_k, t) = T(q_k, \dot{q}_k) - U(q_k, t), \quad (392)$$

für welche gilt:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} L \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} L = 0}. \quad (393)$$

13 Lagrange 1

13. Vorlesung: Dienstag 29.11.2022 — [Scheck 2.3 - 2.8](#)

13.1 Euler-Lagrange-Gleichungen

In der letzten Vorlesung haben wir die **d'Alembertschen Gleichungen** abgeleitet:

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \right] T = Q_k, \quad (394)$$

mit der **verallgemeinerten Kraft**

$$Q_k = \sum_{i=1}^n \vec{K}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}. \quad (395)$$

Ist die Kraft \vec{K}_i eine Potentialkraft, dann definieren wir die **Lagrange-Funktion** als Differenz von kinetischer und potentieller Energie

$$L(q_k, \dot{q}_k, t) = T(q_k, \dot{q}_k) - U(q_k, t). \quad (396)$$

Ausgehend von den Newtonschen Bewegungsgleichungen und dem Postulat, dass die virtuelle Arbeit der Zwangskräfte verschwindet, konnten wir die **Lagrange-Gleichungen 2. Art** ableiten:

$$\boxed{\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \right] L = 0}. \quad (397)$$

Die Funktionen U und T sind ursprünglich in den Koordinaten \vec{r}_i ausgedrückt, wir geben nun die Abhängigkeit von den generalisierten Koordinaten q_k an.

$$\begin{aligned} U(q_1, q_2, \dots, q_f, t) &= U(\vec{r}_1(q_1, q_2, \dots, q_f, t), \dots, \vec{r}_n(q_1, q_2, \dots, q_f, t)), \\ T(q_k, \dot{q}_k) &= \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \dot{r}_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \left(\sum_{k=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 \\ &= a + \sum_{k=1}^f b_k \dot{q}_k + \sum_{k=1}^f \sum_{l=1}^f c_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l, \end{aligned} \quad (398)$$

mit

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2, \\ b_k &= \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}, \\ c_{kl} &= \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}. \end{aligned} \quad (399)$$

Die Form $L = T - U$ nennt man die **natürliche Form** von L . Bei skleronomen Zwangsbedingungen ($\partial \vec{r}_i / \partial t = 0$) folgt $a = 0 = b_k$ und L ist dann auch eine quadratische Form in den \dot{q}_k .

13.2 Beispiele

1. Teilchen in einer Kugelschale:
Die Zwangsbedingung lautet

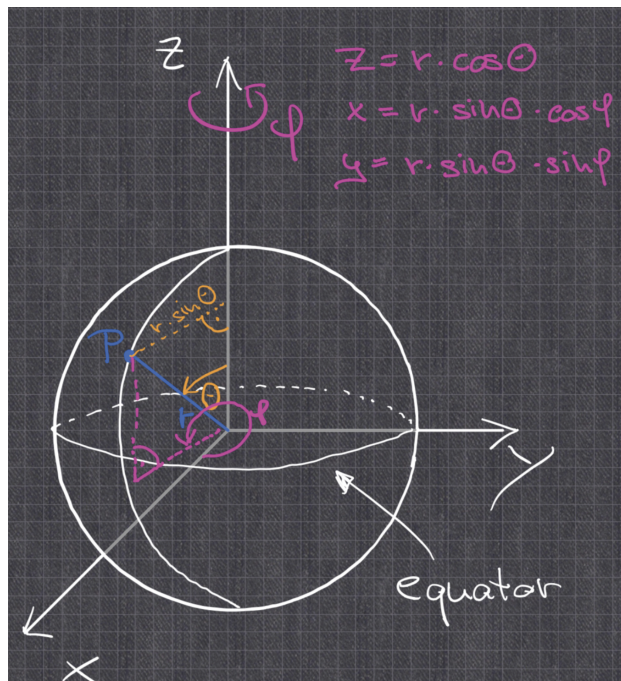
$$f_1 = r - R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - R = 0. \quad (400)$$

Mögliche (unabhängige) generalisierte Koordinaten sind die Winkel

$$q_1 = \theta, \quad q_2 = \varphi. \quad (401)$$

Beachte: Für die Kugelkoordinaten gilt

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (402)$$



Die dynamische Kraft im Schwerfeld der Erde lautet

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}. \quad (403)$$

Daraus folgen die verallgemeinerten Kräfte

$$Q_1 = \vec{K} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ -r \sin \theta \end{pmatrix} = mgr \sin \theta,$$

$$Q_2 = \vec{K} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \quad (404)$$

Da es sich um Potentialkräfte handelt, gilt

$$Q_1 = mgr \sin \theta = -\frac{\partial U}{\partial \theta} \Rightarrow U(\theta) = mgr \cos \theta + \text{const.}(\varphi),$$

$$Q_2 = 0 = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} \Rightarrow U(\theta) = \text{const.}(\theta). \quad (405)$$

Damit erhalten wir für das Potential

$$U(q_1, q_2) = mgR \cos q_1 + \text{const.} \quad (406)$$

Dieses Potential hätten wir auch direkt aus dem Ansatz

$$\begin{aligned} U &= mgh, \\ h &= R + R \cos q_1 \end{aligned} \quad (407)$$

herleiten können.

Für die kinetische Energie ergibt sich mit

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{q}_1 R \cos q_1 \cos q_2 - \dot{q}_2 R \sin q_1 \sin q_2, \\ \dot{y} &= \dot{q}_1 R \cos q_1 \sin q_2 + \dot{q}_2 R \sin q_1 \cos q_2, \\ \dot{z} &= -\dot{q}_1 R \sin q_1, \\ \Rightarrow \dot{r}^2 &= \dot{q}_1^2 R^2 + \dot{q}_2^2 R^2 \sin^2 q_1, \\ T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, q_1) &= \frac{m}{2} R^2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 \sin^2 q_1). \end{aligned} \quad (408)$$

Damit lautet die Lagrange-Funktion ausgedrückt in generalisierten Koordinaten

$$L(\dot{q}_1, \dot{q}_2, q_1, q_2) = \frac{m}{2} R^2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 \sin^2 q_1) - mgR \cos q_1 \quad (409)$$

Die Lagrange-Gleichungen ergeben dann

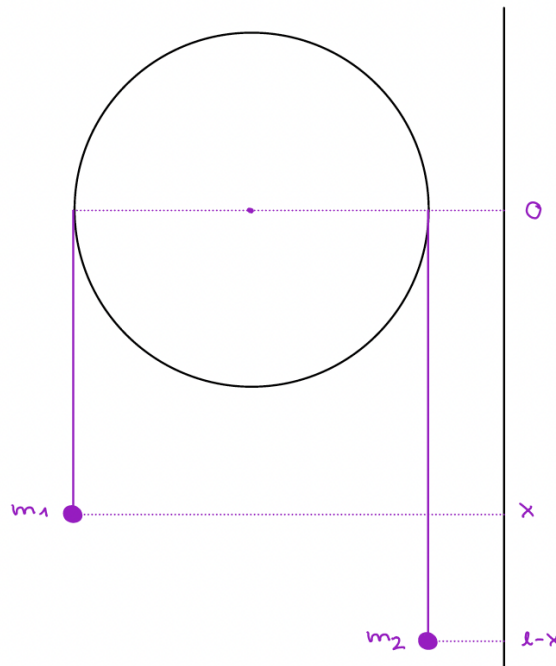
$$\begin{aligned} 0 &= \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial}{\partial q_1} \right] L = mR^2 \ddot{q}_1 - mR^2 \dot{q}_2^2 \sin q_1 \cos q_1 - mgR \sin q_1, \\ 0 &= \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_2} \right] L = mR^2 (\ddot{q}_2 \sin^2 q_1 + 2\dot{q}_2 \sin q_1 \cos q_1 \dot{q}_1) \end{aligned} \quad (410)$$

und somit die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 - \left[\dot{q}_2^2 \cos q_1 + \frac{g}{R} \right] \sin q_1 &= 0, \\ \frac{d}{dt} (\dot{q}_2 \sin^2 q_1) &= 0. \end{aligned} \quad (411)$$

2. Atwoodsche Fallmaschine:

Wir betrachten eine vereinfachte Version der Atwoodschen Maschine, bei der die rotierende Scheibe masselos angenommen und wir daher keine Rotationsenergie eines starren Körpers berücksichtigen müssen.



Über die Scheibe mit Radius R ist ein Seil gelegt mit der Länge $l + \pi R$. An den beiden Seilhängen hängt jeweils eine Masse m_1 bzw. m_2 . Befindet sich die Masse m_1 im Abstand x unter dem Schwerpunkt der Scheibe, dann befindet sich die Masse m_2 im Abstand $l - x$ unter dem Schwerpunkt der Scheibe.

Die gesamte Bewegung kann durch die Koordinate x alleine beschrieben werden und wir erhalten

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2, \\ U &= -m_1gx - m_2g(l - x). \end{aligned} \quad (412)$$

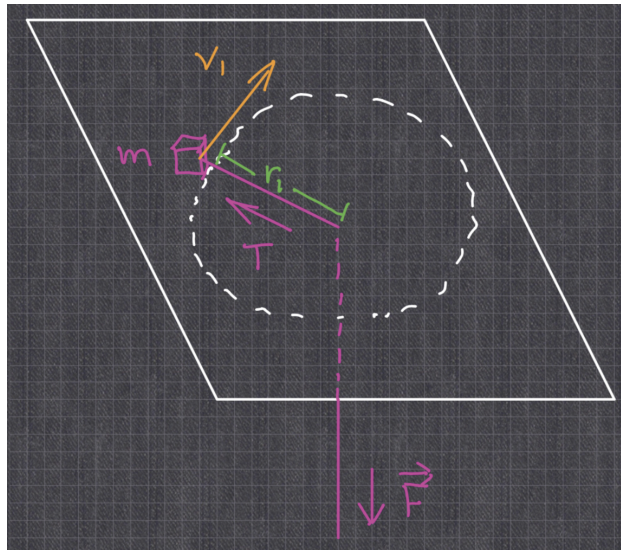
Mit der Lagrange-Gleichung erhalten wir

$$0 = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \right] L = (m_1 + m_2)\ddot{x} - (m_1 - m_2)g$$

$$\ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g. \quad (413)$$

Dies lässt sich einfach integrieren.

3. Rotation: Wir betrachten ein Teilchen der Masse m an einem Faden, das um einen Punkt S rotiert. Der Faden wird mit konstanter Geschwindigkeit c verkürzt. x und y sind die Koordinaten in der Rotationsebene und φ der Polarwinkel.



Als verallgemeinerte Koordinate wählen wir $q = \varphi$. Für die Koordinaten gilt

$$x = (R_0 - ct) \cos q,$$

$$y = (R_0 - ct) \sin q. \quad (414)$$

Damit folgt

$$\dot{x} = -(R_0 - ct) \sin q \dot{q} - c \cos q,$$

$$\dot{y} = (R_0 - ct) \cos q \dot{q} - c \sin q,$$

$$\Rightarrow \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (R_0 - ct)^2 \dot{q}^2 + c^2. \quad (415)$$

Die kinetische Energie lautet also

$$T = \frac{m}{2}(R_0 - ct)^2 \dot{q}^2 + c^2. \quad (416)$$

Dies ist keine homogene quadratische Funktion in \dot{q} , das liegt an den rheonomen Zwangsbedingungen. Für die Bewegungsgleichungen ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \right] L = m \frac{d}{dt} (R_0 - ct)^2 \dot{q} \\ &\Rightarrow \dot{q} = \frac{k}{(R_0 - ct)^2}. \end{aligned} \quad (417)$$

13.3 Variationsprinzipien

- **D'Alembertsches Prinzip** ist Ausdruck eines Gleichgewichts: rüttelt man an dem System in einer mit den Zwangsbedingungen verträglichen Weise, so ist die virtuelle Arbeit gleich Null. Das System befindet sich in einem Extremalzustand. Der physikalische Zustand zeichnet sich gegenüber allen anderen denkbaren Zuständen dadurch aus, dass er Gegenüber kleinen Verrückungen stabil ist.
- **Fermatsches Prinzip** in der geometrischen Optik: Licht sucht sich den kürzesten Weg. Licht bewegt sich auf einer **Geodäte**.
- **Hamiltonsches Extremalprinzip I**: kann man einem mechanischen System ein Funktional zuordnen, so dass die physikalische Bahn dieses Funktional extremal macht? Die physikalische Bahn wäre somit eine Geodäte auf einer Mannigfaltigkeit, die durch die Kräfte bestimmt ist. Es wird sich rausstellen, dass dieses Funktional die Wirkung S ist

$$S = \int L(q, \dot{q}, t) dt. \quad (418)$$

Diese Prinzip lässt sich auf Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden (Feldtheorien), quantisierte (Quantenmechanik) und relativistische Theorien (Quantenfeldtheorien) erweitern.

Heute: jede Theorie der fundamentalen Wechselwirkungen kann aus einem Extremalprinzip hergeleitet werden.

- **Variationsrechnung:** Suche eine Funktion $y(x)$ der realen Variablen x , so dass das Funktional

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx f[y(x), y'(x), x],$$

$$y'(x) = \frac{d}{dx} y(x) \quad (419)$$

extremal (Maximum oder Minimum oder Sattelpunkt) ist. An den Randpunkten x_1 und x_2 nimmt die gesuchte Funktion die vorgegebenen Werte $y_1 = y(x_1)$ und $y_2 = y(x_2)$ an.

Zu diesem Zweck betrachten wir zunächst

$$I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} dx f[y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x],$$

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \eta(x), \quad (420)$$

mit $\eta(x_1) = 0 = \eta(x_2)$. Man vergleicht also $y(x)$ mit Kurven, die dieselben Randbedingungen erfüllen.

Nun definieren wir die Variation von I

$$\begin{aligned} \delta I &= \frac{dI}{d\alpha} d\alpha = \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{dy'}{d\alpha} \right\} d\alpha \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} \frac{dy}{d\alpha} \right\} d\alpha \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{d\alpha} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{dy}{d\alpha} \right\} d\alpha + \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{dy}{d\alpha} \right|_{x_1}^{x_2} d\alpha. \quad (421) \end{aligned}$$

Da $dy/d\alpha = \eta$ an den Punkten x_1 und x_2 verschwindet, verschwindet auch der konstante Term und wir erhalten

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right\} \eta d\alpha. \quad (422)$$

Wir fordern nun, dass $I(\alpha)$ extremal sein soll, d.h. $\delta I = 0$ für beliebige Funktionen η , daher muss der Integrand verschwinden, d.h.

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0. \quad (423)$$

Dies ist die **Eulersche Differentialgleichung der Variationsrechnung**.

Definition: Die Variationsableitung von f nach y ist

$$\frac{\delta f}{\delta y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right). \quad (424)$$

Definition: Die infinitesimale Variation der Kurve $y(x)$ ist

$$\delta y = \frac{dy}{d\alpha} d\alpha. \quad (425)$$

Damit lautet die Variation von I

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\delta f}{\delta y} \delta y. \quad (426)$$

13.4 Hamiltonsches Extremalprinzip

Nun identifizieren wir $f(y, y', x)$ mit $L(q, \dot{q}, t)$, und I wird das Wirkungsintegral

$$S = \int L(q, \dot{q}, t) dt. \quad (427)$$

Anwenden der Eulerschen Differentialgleichung liefert dann die Lagrange-Gleichungen, die wir aus dem d'Alembertschen Prinzip hergeleitet hatten

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0. \quad (428)$$

Unser neuer Ausgangspunkt wird die Mechanik wird nun sein:

Postulat: Einem mechanischen System mit f Freiheitsgraden $q = \{q_1, q_2, \dots, q_f\}$ sei eine \mathcal{C}^2 -Funktion der Variablen q_i und \dot{q}_i und der Zeit t

$$L(q_i, \dot{q}_i, t), \quad (429)$$

die **Lagrange-Funktion** zugeordnet.

Weiter sei eine physikalische Bahnkurve, d.h. eine Lösung der Bewegungsgleichungen

$$\underline{\varphi}(t) = \{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_f(t)\}. \quad (430)$$

Im Intervall $t_1 \leq t \leq t_2$ gegeben die die Randwerte $\underline{\varphi}(t_1) = \underline{a}$ und $\underline{\varphi}(t_2) = \underline{b}$ annimmt.

Diese Bahnkurve macht das **Wirkungsintegral**

$$S[\underline{q}] = \int_{t_1}^{t_2} L[\underline{q}(t), \dot{\underline{q}}(t), t] dt \quad (431)$$

extremal.

Bemerkungen:

1. Das Produkt aus Energie und Zeit wird als Wirkung bezeichnet.
2. Meist ist das Extremum der Wirkung bei gegebenen Randbedingungen ein Minimum - es kann aber auch ein Maximum sein....
3. Für Beweis im Mehrdimensionalen, siehe Scheck, Kapitel 2.7.
4. *Principle of least action* gilt für alles: Mechanik, Edynamik, QM, QFT,....
Kompakteste Form der klassischen Gleichungen: alles steckt in einer Funktion - auch in E-dynamik, ART, QFT,....!
Praktischer Vorteil: erleichtert technische Lösung von Problemen. Insbesondere bei Scheinkräften!
5. n -Teilchensystem:
 - klassisch: Anfangsbedingungen bei $t = t_0$: $3N$ Koordinaten, $3N$ Geschwindigkeiten.

- Lagrange: Anfangsposition bei $t = t_A$: $3N$ Koordinaten, Endposition bei $t = t_E$: $3N$ Koordinaten. Nun ist die Bestimmung der Anfangsgeschwindigkeit Teil der Problemlösung.

Wir bezeichnen nun die Bedingung an die Lagrange-Funktion

$$\frac{\delta L}{\delta q_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0 \quad (432)$$

mit $k = 1, 2, \dots, f$ als **Euler-Lagrange-Gleichungen**.

13.5 Beispiele

13.5.1 1 dimensionale Bewegung

L ist ein Funktional und lautet in der natürlichen Form

$$\begin{aligned} L &= L(x, \dot{x}) = E_{Kin} - E_{Pot} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - U(x), \\ S &= \int L(x, \dot{x}) dt. \end{aligned} \quad (433)$$

Finde den Pfad mit einer stationären Wirkung: Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0. \quad (434)$$

Wenden wir das auf L an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \frac{d}{dt} m \dot{x} = m \ddot{x}, \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= -\frac{\partial U}{\partial x} = F. \end{aligned} \quad (435)$$

Damit erhalten wir wieder die Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$F = m \ddot{x}. \quad (436)$$

13.5.2 n -Teilchensystem

Wir setzen für die Lagrange-Funktion wieder die natürlich Form an

$$L = T - U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t). \quad (437)$$

Als generalisierte Koordinaten wählen wir die kartesischen Koordinaten

$$\underline{\vec{q}} = \{q_1, q_2, \dots, q_{f=3n}\} = \{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n\}. \quad (438)$$

Damit erhalten wir aus den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{d}{dt} m_k \dot{q}_k = m_k \ddot{q}_k, \\ \frac{\partial L}{\partial q_k} &= -\frac{\partial U}{\partial q_k} = F_k. \end{aligned} \quad (439)$$

Damit erhalten wir wieder die Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$F_k = m_k \ddot{q}_k. \quad (440)$$

Unsere bekannte Mechanik kann also als Spezialfall aus dem Hamiltonschen Extremalprinzip abgeleitet werden.

13.5.3 Geladenes Teilchen in elektrischen und magnetischen Feldern

Wir betrachten als verallgemeinerte Koordinaten wieder die kartesischen Koordinaten

$$\underline{\vec{q}} = \{q_1, q_2, q_3\} = \{x, y, z\}. \quad (441)$$

Auf das Teilchen wirkt die **Lorentz-Kraft**

$$m \underline{\ddot{\vec{q}}} = q \underline{\vec{E}}(\underline{\vec{q}}, t) + \frac{q}{c} \underline{\dot{\vec{q}}} \times \underline{\vec{B}}(\underline{\vec{q}}, t). \quad (442)$$

Elektrische und magnetische Felder können durch skalare und vektorielle Potentiale ausgedrückt werden

$$\begin{aligned} \underline{\vec{E}}(\underline{\vec{q}}, t) &= -\underline{\vec{\nabla}}_q \phi(\underline{\vec{q}}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \underline{\vec{A}}(\underline{\vec{q}}, t), \\ \underline{\vec{B}}(\underline{\vec{q}}, t) &= \underline{\vec{\nabla}}_q \times \underline{\vec{A}}(\underline{\vec{q}}, t). \end{aligned} \quad (443)$$

$\phi(\underline{\vec{q}}, t)$ nennt man das skalare Potential und $\underline{\vec{A}}(\underline{\vec{q}}, t)$ das Vektorpotential.

Behauptung: Die Lorentz-Kraft kann aus folgender Lagrange-Funktion abgeleitet werden:

$$L(\underline{\vec{q}}, \underline{\dot{\vec{q}}}, t) = \frac{m}{2} \underline{\dot{\vec{q}}}^2 + \frac{q}{c} \underline{\dot{\vec{q}}} \cdot \underline{\vec{A}}(\underline{\vec{q}}, t) - q\phi(\underline{\vec{q}}, t). \quad (444)$$

Aus den Euler-Lagrange-Gleichungen finden wir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial q_i} &= -q \frac{\partial \phi}{\partial q_i} + \frac{q}{c} \dot{\vec{q}} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial q_i} \left(+ \frac{q^2}{mc^2} \vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial q_i} \right), \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= m \dot{q}_i + \frac{q}{c} A_i, \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= m \ddot{q}_i + \frac{q}{c} \left[\sum_{k=1}^f \frac{\partial A_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial A_i}{\partial t} \right]
\end{aligned} \tag{445}$$

und somit

$$q \left[-\frac{\partial \phi}{\partial q_i} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right] + \frac{q}{c} \sum_{k=1}^f \dot{q}_k \cdot \left[\frac{\partial A_k}{\partial q_i} - \frac{\partial A_i}{\partial q_k} \right] = m \ddot{q}_i. \tag{446}$$

Beachte:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 A_z - \partial_3 A_y \\ \partial_3 A_x - \partial_1 A_z \\ \partial_1 A_y - \partial_2 A_x \end{pmatrix}, \\
\dot{\vec{q}} \times \vec{B} &= \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_2 A_z - \partial_3 A_y \\ \partial_3 A_x - \partial_1 A_z \\ \partial_1 A_y - \partial_2 A_x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dot{q}_2(\partial_1 A_y - \partial_2 A_x) - \dot{q}_3(\partial_3 A_x - \partial_1 A_z) \\ \dot{q}_3(\partial_2 A_z - \partial_3 A_y) - \dot{q}_1(\partial_1 A_y - \partial_2 A_x) \\ \dot{q}_1(\partial_3 A_x - \partial_1 A_z) - \dot{q}_2(\partial_2 A_z - \partial_3 A_y) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dot{q}_1(\partial_1 A_x - \partial_1 A_x) + \dot{q}_2(\partial_1 A_y - \partial_2 A_x) + \dot{q}_3(\partial_1 A_z - \partial_3 A_x) \\ \dot{q}_1(\partial_2 A_x - \partial_1 A_y) + \dot{q}_2(\partial_2 A_y - \partial_2 A_y) + \dot{q}_3(\partial_2 A_z - \partial_3 A_y) \\ \dot{q}_1(\partial_3 A_x - \partial_1 A_z) + \dot{q}_2(\partial_3 A_y - \partial_2 A_z) + \dot{q}_3(\partial_3 A_z - \partial_3 A_z) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{447}$$

D.h. wir haben als Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned}
m \ddot{q}_i &= q \left[-\frac{\partial \phi}{\partial q_i} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right] + \frac{q}{c} \sum_{k=1}^f \dot{q}_k \cdot \left[\frac{\partial A_k}{\partial q_i} - \frac{\partial A_i}{\partial q_k} \right] \\
&= q \vec{E} + \frac{q}{c} \dot{\vec{q}} \times \vec{B}
\end{aligned} \tag{448}$$

die Lorentz-Kraft abgeleitet.

14 Lagrange 2

14. Vorlesung: Freitag 2.12.2022 — [Scheck 2.9 - ...](#)

14.1 Nichteindeutigkeit der Lagrange-Funktion

Beachte: Man kann die Potentiale ϕ und \vec{A} wie folgt transformieren, ohne unterschiedliche Werte für die elektrischen und magnetischen Felder, i.e. \vec{E} und \vec{B} zu erhalten:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\underline{q}, t) &\rightarrow \vec{A}'(\underline{q}, t) = \vec{A}(\underline{q}, t) + \vec{\nabla}\chi(\underline{q}, t), \\ \phi(\underline{q}, t) &\rightarrow \phi'(\underline{q}, t) = \phi(\underline{q}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \chi(\underline{q}, t).\end{aligned}\quad (449)$$

Diese Transformationen nennt man **Eichtransformationen des elektromagnetischen Feldes** und das gesamte Theoriestrukt der heutigen Elementarteilchenphysik beruht auf dem Konzept der Invarianz unter Eichtransformationen, kurz **Eichinvarianz**.

Damit erhält man für die transformierten \vec{E} und \vec{B} -Felder

$$\begin{aligned}\vec{E}'(\underline{q}, t) &= -\vec{\nabla} \left(\phi(\underline{q}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \chi(\underline{q}, t) \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{A}(\underline{q}, t) + \vec{\nabla}\chi(\underline{q}, t) \right) \\ &= \vec{E}'(\underline{q}, t), \\ \vec{B}'(\underline{q}, t) &= \vec{\nabla} \times \left(\vec{A}(\underline{q}, t) + \vec{\nabla}\chi(\underline{q}, t) \right) = \vec{B}(\underline{q}, t).\end{aligned}\quad (450)$$

Die letzte Gleichung folgt, da $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\chi = 0$. Wir haben also gefunden, dass sich die \vec{E} und \vec{B} -Felder bei Eichtransformationen nicht verändern, d.h. die Physik bleibt die gleiche.

Was passiert mit der Lagrange-Funktion unter diesen Eichtransformationen? Die transformierte Lagrange-Funktion lautet

$$\begin{aligned}L'(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) &= \frac{m}{2} \dot{\underline{q}}^2 + \frac{q}{c} \dot{\underline{q}} \cdot \vec{A}'(\underline{q}, t) - q\phi'(\underline{q}, t) \\ &= \frac{m}{2} \dot{\underline{q}}^2 + \frac{q}{c} \dot{\underline{q}} \cdot \left(\vec{A}(\underline{q}, t) + \vec{\nabla}\chi(\underline{q}, t) \right) - q \left(\phi(\underline{q}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \chi(\underline{q}, t) \right) \\ &= L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) + \frac{q}{c} \left(\dot{\underline{q}} \cdot \vec{\nabla}\chi(\underline{q}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \chi(\underline{q}, t) \right) \\ &= L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) + \frac{q}{c} \frac{d}{dt} \chi(\underline{q}, t).\end{aligned}\quad (451)$$

Die beiden Lagrange-Funktionen L und L' beschreiben diesselben Bewegungsgleichungen und sie unterscheiden sich um eine totale Zeitableitung einer Funktion von \vec{q} und t .

D.h. die Lagrange-Funktion ist somit nicht eindeutig und keine physikalische Größe (= Meßgröße)!

14.2 Eichtransformationen an der Lagrange-Funktion

Satz: sei $M(\vec{q}, t)$ eine \mathcal{C}^3 Funktion und sei

$$\begin{aligned} L'(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) &= L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) + \frac{d}{dt} M(\vec{q}, t) \\ &= L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) + \frac{\partial M}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial M}{\partial t} \end{aligned} \quad (452)$$

eine **Eichtransformation der Lagrange-Funktion**. Dann ist $\vec{q}(t)$ genau dann eine Integralkurve von $\delta L'/\delta q_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, f$, wenn es eine Lösung von $\delta L/\delta q_k = 0$ ist.

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{\delta L'}{\delta q_k} &= \frac{\delta L}{\delta q_k} + \left[\frac{\partial}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \right] \frac{dM}{dt} \\ &= \frac{\delta L}{\delta q_k} + \left[\frac{\partial}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \right] \left(\frac{\partial M}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial M}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\delta L}{\delta q_k} + \frac{\partial^2 M}{\partial q_l \partial q_k} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 M}{\partial t \partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial M}{\partial q_k} \\ &= \frac{\delta L}{\delta q_k} + \frac{\partial^2 M}{\partial q_l \partial q_k} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 M}{\partial t \partial q_k} - \frac{\partial^2 M}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_l - \frac{\partial^2 M}{\partial q_k \partial t} \\ &= \frac{\delta L}{\delta q_k}. \end{aligned} \quad (453)$$

Beachte: M darf nicht von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten \dot{q}_k abhängen!

Beispiel: Die Lagrange-Funktion des harmonischen Oszillators kann in der natürlichen Form $L = T - U$ als

$$L = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dz_1}{d\tau} \right)^2 - z_1^2 \right] \quad (454)$$

geschrieben werden. Zur selben Form der Bewegungsgleichungen führen auch folgende Lagrange-Funktionen

$$L = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dz_1}{d\tau} \right)^2 - z_1^2 \right] + \frac{d}{d\tau} \frac{z_1^2}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dz_1}{d\tau} \right)^2 - z_1^2 \right] + z_1 \frac{dz_1}{d\tau}. \quad (455)$$

14.3 Transformation der verallgemeinerten Koordinaten

Die Lagrange-Funktion ist sogar unter beliebigen eindeutigen und differenzierbaren Transformation der verallgemeinerten Koordinaten \vec{q} invariant. Solche Transformationen heissen **Diffeomorphismen**, i.e. Abbildungen $f : U \rightarrow V$, für die f und f^{-1} stetig sind.

Satz: Es sei $F : \vec{q} \mapsto \vec{Q}$ ein Diffeomorphismus, der (mindestens) \mathcal{C}^2 ist,

$$\begin{aligned} Q_i &= F_i(q_1, \dots, q_f, t), \quad i = 1, \dots, f, \\ q_k &= f_k(Q_1, \dots, Q_f, t), \quad k = 1, \dots, f, \end{aligned} \quad (456)$$

mit $f = F^{-1}$.

Dann gilt insbesondere

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial Q_k} \right) \neq 0. \quad (457)$$

Dann ist $\delta L / \delta q_k = 0$ äquivalent zu $\delta \bar{L} / \delta Q_k = 0$, $k = 1, \dots, f$; d.h. $\vec{Q}(t)$ ist die Lösung der Lagrange-Gleichung zur transformierten Lagrange-Funktion

$$\bar{L} = L \circ F^{-1} = L \left(f_i(\vec{Q}, t), \frac{\partial f_i}{\partial Q_k} \dot{Q}_k + \frac{\partial f_i}{\partial t}, t \right), \quad (458)$$

genau dann wenn $\vec{q}(t)$ Lösung der Lagrange-Gleichungen zu L ist.

Beweis: Die Variationsableitung von \bar{L} nach Q_k , $\delta \bar{L} / \delta Q_k$ besteht aus den

beiden Elementen

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_k} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\sum_l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{Q}_k} \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial q_l}{\partial Q_k} \right) \\
 &= \sum_l \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \frac{\partial q_l}{\partial Q_k} + \sum_l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial Q_k} \\
 &= \sum_l \frac{\partial L}{\partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial Q_k} + \sum_l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial Q_k} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial Q_k}. \quad (459)
 \end{aligned}$$

Es stimmt also nicht im allgemeinen zu sagen: Die Lagrange-Funktion ist T-U". Dies ist lediglich die natürliche Form, aber keineswegs die einzige mögliche Form!

Der bewiesene Satz sagt nur aus, dass es zu jedem Satz von generalisierten Koordinaten unendliche viele äquivalente Sätze gibt. Welche man wählen sollte hängt z.B. von den Symmetrien des Problemes und insbesondere von der Anzahl der **Integrale der Bewegung**.

14.4 Hamilton-Funktion

Definition: Die **Hamilton-Funktion** ist definiert als

$$H(q, \dot{q}) = \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L(q, \dot{q}). \quad (460)$$

Behauptung: Ist die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängig, dann ist H eine Konstante der Bewegung.

Beweis:

$$\frac{dH(q, \dot{q})}{dt} = \ddot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \dot{q}_k \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k = 0. \quad (461)$$

Beispiel: Für die Lagrange-Funktion

$$L = T - U = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r}) \quad (462)$$

erhalten wir als Hamilton-Funktion

$$\begin{aligned}
 H(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) &= \dot{\vec{r}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} - L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) \\
 &= m \dot{\vec{r}}^2 - \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + U(\vec{r}) = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + U(\vec{r}) = E \quad (463)
 \end{aligned}$$

die Gesamtenergie E !

15 Hamilton-Funktion

15. Vorlesung: Dienstag 6.12.2022 — [Scheck 2.12...](#)

15.1 Hamilton-Funktion

Wiederholung: Die **Hamilton-Funktion** ist definiert als

$$H(q, \dot{q}) = \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L(q, \dot{q}). \quad (464)$$

Ist die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängig, dann ist H eine Konstante der Bewegung.

$$\frac{dH(q, \dot{q})}{dt} = 0. \quad (465)$$

Beispiel: Für die Lagrange-Funktion

$$L = T - U = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r}) \quad (466)$$

erhalten wir als Hamilton-Funktion

$$H(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + U(\vec{r}) = E \quad (467)$$

die Gesamtenergie E !

Ersetzen wir weiter $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$, so lautet die Hamilton-Funktion nun als Funktion von Koordinate und Impuls (anstatt Koordinate und Geschwindigkeit)

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r}) = E. \quad (468)$$

Definition: der zu q_k **kanonisch konjugierte Impuls** p_k ist definiert als

$$p_k := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}. \quad (469)$$

Beispiele:

1. In unserem einfachen Beispiel oben ist der kanonische konjugierte Impuls gleich dem Impuls

$$p := \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial \left[\frac{m}{2} \dot{r}^2 - U(\vec{r}) \right]}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}. \quad (470)$$

2. Für eine zweidimensionale freie Bewegung einer Masse m in einer Ebene gilt

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi, \\ \Rightarrow \dot{x} &= \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi}, & \dot{y} &= \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi}, \\ & \Rightarrow L &= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2). \end{aligned} \quad (471)$$

Daraus ergeben sich die kanonisch konjugierten Impulse

$$\begin{aligned} p_r &= m\dot{r}, \\ p_\varphi &= mr^2\dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (472)$$

Aufgrund der Euler-Lagrange-Gleichungen gilt weiter

$$\begin{aligned} \dot{p}_r &= \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2, \\ \dot{p}_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0. \end{aligned} \quad (473)$$

Nun hat der Impuls p_φ nicht mehr die uns vertraute Form.

Definition: Hängt die Lagrange-Funktion L nicht explizit von der Koordinate q_k ab, (aber von \dot{q}_k), so bezeichnet man q_k als **zyklische Koordinate**. Der zugehörige kanonisch konjugierte Impuls p_k ist dann eine Konstante der Bewegung.

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{d}{dt} p_k = 0. \quad (474)$$

Beispiele:

- 1.

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (475)$$

In diesem Fall sind die drei Impulse $m\dot{x}$, $m\dot{y}$ und $m\dot{z}$ erhalten.

2.

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + V(x_1 - x_2) \quad (476)$$

Auf den ersten Blick tritt hier keine zyklische Koordinate auf. Transformieren wir allerdings auf folgende Koordinaten

$$x_+ = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad x_- = \frac{x_1 - x_2}{2}, \quad (477)$$

dann lautet die Lagrange-Funktion

$$L = m (\dot{x}_+^2 + \dot{x}_-^2) + V(x_-). \quad (478)$$

Nun ist offensichtlich x_+ eine zyklische Koordinate und der Impuls $2m\dot{x}_+$ ist erhalten. Beachte: $2m\dot{x}_+ = m\dot{x}_1 + m\dot{x}_2$ ist der Gesamtimpuls.

Beachte: die Lagrange-Funktion ist keine Konstante der Bewegung.

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \sum_k \left(\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right] \dot{q}_k + p_k \ddot{q}_k \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \sum_k (\dot{p}_k \dot{q}_k + p_k \ddot{q}_k) + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \frac{d}{dt} \sum_k (p_k \dot{q}_k) + \frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned} \quad (479)$$

Im einfachen Beispiel $L = T - U = mv^2/2 - U$ ist $p_k \dot{q}_k = mv^2$. Die kinetische Energie ist keine Erhaltungsgröße, ausser im trivialen Fall $U = 0$. Die Lagrange-Funktion ist somit im allgemeinen Fall auch keine Erhaltungsgröße.

15.2 Legendre-Transformation (eine Variable)

Wir wollen nun die Frage untersuchen, ob die Funktion $H(q, \dot{q})$ immer auf die Form $H(q, p)$ transformiert werden kann.

Existenzbeweis:

1. Es sei $f(x)$ eine reelle differenzierbare (mindestens \mathcal{C}^2) Funktion. Weiter soll gelten $y := f(x)$, $z := df/dx$ und $d^2f/dx^2 \neq 0$.
2. Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert $x = g(z)$ als Umkehrfunktion zu $z = df(x)/dx$.
3. Damit existiert die **Legendre-Transformierte** \mathcal{L} , die wie folgt definiert ist

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(x)) &:= x \frac{df}{dx} - f(x) \\ &= g(z)z - f[g(z)] =: (\mathcal{L}f)(z).\end{aligned}\quad (480)$$

Wenden wir die Legendre-Transformation zweimal an, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathcal{L}((\mathcal{L}f)(z)) &:= z \frac{d(\mathcal{L}f)}{dz} - (\mathcal{L}f)(z) \\ &= z \left(g(z) + \frac{dg}{dz}z - \frac{df}{dx} \frac{dg}{dz} \right) - (\mathcal{L}f)(z) \\ &= zg(z)z - g(z)z + f(g(z)) =: f(x)\end{aligned}\quad (481)$$

wieder die ursprüngliche Funktion.

Beispiele:

1. Kinetische Energie:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{m}{2}x^2, \\ z &= \frac{df}{dx} = mx, \quad \frac{d^2f}{dx^2} = m \neq 0, \\ x &= g(z) = \frac{z}{m}, \\ (\mathcal{L}f)(z) &= z \frac{z}{m} - \frac{m}{2} \frac{z^2}{m^2} = \frac{z^2}{2m}.\end{aligned}\quad (482)$$

2. Potenzfunktion

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{x^\alpha}{\alpha}, \\
 z &= \frac{df}{dx} = x^{\alpha-1}, \quad \frac{d^2f}{dx^2} = (\alpha-1)x^{\alpha-2} \neq 0 \text{ (for } \alpha \neq 1), \\
 x &= g(z) = z^{\frac{1}{\alpha-1}}. \\
 (\mathcal{L}f)(z) &= zz^{\frac{1}{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha} \left(z^{\frac{1}{\alpha-1}} \right)^\alpha = z^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha} z^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \frac{\alpha-1}{\alpha} z^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.
 \end{aligned} \tag{483}$$

Betrachten wir nur einen Freiheitsgrad $f = 1$ und identifizieren wir $x = \dot{q}$ und $f(x) = L(q, \dot{q}, t)$, so erhalten wir für die Legendre-Transformation von der Lagrange-Funktion die Hamilton-Funktion.

$\dot{q}(q, p, t)$ ist dabei die Umkehrfunktion von $p(q, \dot{q}, t) = \partial L / \partial \dot{q}$.

Nun betrachten wir noch eine zweifache Anwendung der Legendre-Transformation:

$$\begin{aligned}
 L(q, \dot{q}, t) &= \frac{m}{2} \dot{q}^2 - U(q), \\
 \mathcal{L}[L(q, \dot{q}, t)] &= \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L(q, \dot{q}, t) = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - U(q), \\
 p = m\dot{q} &\Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m}, \\
 \Rightarrow (\mathcal{L}L)(q, p, t) &= \frac{p^2}{2m} + U(q) = H(q, p, t), \\
 \mathcal{L}[H(q, p, t)] &= p \frac{\partial H}{\partial p} - H(q, p, t) = \frac{p^2}{2m} - U(q), \\
 p = m\dot{q}, \\
 \Rightarrow (\mathcal{L}H)(q, \dot{q}, t) &= \frac{m}{2} \dot{q}^2 - U(q) = L(q, \dot{q}, t).
 \end{aligned} \tag{484}$$

Eine zweifache Anwendung der Legendre-Transformation auf die Lagrange-Funktion, führt als wieder zur Lagrang-Funktion.

$$L \xrightarrow{\mathcal{L}} H \xrightarrow{\mathcal{L}} L. \tag{485}$$

15.3 Legendre-Transformation (mehrere Variablen)

Nun erweitern wir die Legendre-Transformation auf mehrere Variablen.

Existenzbeweis:

1. Es sei $F(x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_n)$ in allen x_i eine reelle differenzierbare (mindestens \mathcal{C}^2) Funktion mit $\partial^2 f / (\partial x_i \partial x_j) \neq 0$.
2. Weiter soll gelten

$$y_k = \frac{\partial F}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_n). \quad (486)$$

Nachdem Satz über implizite Funktionen existieren lokal eindeutige Umkehrfunktionen φ_i von y_k

$$x_i = \varphi_i(y_1, \dots, y_m, u_1, \dots, u_n). \quad (487)$$

3. Damit existiert die **Legendre-Transformierte** \mathcal{L} , die wie folgt definiert ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[F(x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_n)] &:= \sum_i x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} - F(x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_n) \\ &= \sum_i \varphi_i(y_1, \dots, y_m, u_1, \dots, u_n) y_i - F[\varphi_i(y_1, \dots, y_m, u_1, \dots, u_n)] \\ &=: (\mathcal{L}F)(y_1, \dots, y_m, u_1, \dots, u_n). \end{aligned} \quad (488)$$

Angewendet auf die Lagrange-Funktion $L(\dot{\underline{q}}, \underline{q}, t)$ erhalten wir wieder die Hamilton-Funktion $H(\dot{\underline{q}}, \underline{q}, t)$. Benutzen wir noch die generalisierten Impulse

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}, \quad (489)$$

so können wir diese nach den generalisierten Geschwindigkeiten auflösen $\dot{q}_k = \dot{q}_k(\underline{q}, \underline{p}, t)$ und erhalten für die Hamilton-Funktion

$$H(\underline{q}, \underline{p}, t) = \sum_k p_k \dot{q}_k(\underline{q}, \underline{p}, t) - L[\underline{q}, \dot{\underline{q}}(\underline{q}, \underline{p}, t), t]. \quad (490)$$

15.4 Kanonische Systeme

Kann man die Bewegungsleichungen direkt aus der Hamilton-Funktion aufstellen?

Betrachten wir als nächstes die partiellen Ableitungen von H nach q und \dot{q}

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H}{\partial q_l} &= \sum_k p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_l} - \frac{\partial L}{\partial q_l} - \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_l} \\
 &= -\frac{\partial L}{\partial q_l} + \sum_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_l} \underbrace{\left(p_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right)}_{=0} \\
 &= -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = -\dot{p}_l, \\
 \frac{\partial H}{\partial p_l} &= \dot{q}_l + \sum_k p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_l} - \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_l} \\
 &= \dot{q}_l + \sum_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_l} \underbrace{\left(p_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right)}_{=0}.
 \end{aligned} \tag{491}$$

16 Kanonische Systeme

16. Vorlesung: Dienstag 13.12.2022 — [Scheck 2.18...2.22](#)

16.1 Kanonische Systeme

Definition: Ein System dem man eine Hamilton-Funktion $H(q, p, t)$ zuordnen kann und das die kanonischen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial q_l} &= -\dot{p}_l, \\ \frac{\partial H}{\partial p_l} &= \dot{q}_l,\end{aligned}\tag{492}$$

erfüllt, ist ein **kanonische System**.

Bemerkungen:

1. Die kanonischen Gleichungen sind $2f$ Differentialgleichungen erster Ordnung. Vergleiche: die Euler-Lagrange-Gleichungen sind f Differentialgleichungen zweiter Ordnung.
2. Jedes Lagrange-System mit

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_l}\right) \neq 0\tag{493}$$

ist ein kanonisches System.

3. Jedem kanonischen System mit

$$\det\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_l}\right) \neq 0\tag{494}$$

kann die Lagrange-Funktion

$$L(q, \dot{q}, t) = \mathcal{L}[H(q, p, t)] = \sum_k \dot{q}_k p_k(q, \dot{q}, t) - H(q, p(q, \dot{q}, t), t)\tag{495}$$

zugeordnet werden, die den Euler-Lagrange-Gleichungen genügt.

16.2 Beispiele

16.2.1 Teilchen im Zentralfeld

Betrachte als Bewegungsebene, die Ebene die senkrecht zum erhaltenen Drehimpuls steht. Für die Bewegung in dieser Ebene lautet die Lagrange-Funktion in der natürlichen Form

$$L = T - U(r) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r). \quad (496)$$

Bezeichnen wir die verallgemeinerten Koordinaten mit

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad (497)$$

so erhalten wir für die verallgemeinerten Impulse

$$p_1 = m\dot{r}, \quad p_2 = mr^2\dot{\varphi}. \quad (498)$$

Für die Determinante der 2. Ableitungen gilt

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_l}\right) = \det\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & mr^2 \end{pmatrix} = m^2 r^2 \neq 0 \quad (499)$$

solange m und r ungleich Null sind.

Für die Hamilton-Funktion erhalten wir dann

$$\begin{aligned} H &= p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - L(q, \dot{q}) \\ &= \frac{p_1^2}{m} + \frac{p_2^2}{mr^2} - \frac{m}{2} \left(\frac{p_1^2}{m^2} + r^2 \frac{p_2^2}{m^2 r^4} \right) + U(q_1) \\ &= \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2mq_1^2} + U(q_1). \end{aligned} \quad (500)$$

Die kanonischen Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_1} &= -\frac{p_2^2}{mq_1^3} + \frac{\partial U}{\partial q_1} = -\dot{p}_1, & \frac{\partial H}{\partial p_1} &= \frac{p_1}{m} = \dot{q}_1, \\ \frac{\partial H}{\partial q_2} &= 0 = -\dot{p}_2, & \frac{\partial H}{\partial p_2} &= \frac{p_2}{mq_1^2} = \dot{q}_2. \end{aligned} \quad (501)$$

p_2 ist der erhaltene Drehimpuls L - q_2 ist eine zyklische Koordinate!

Die Hamilton-Funktion

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{L^2}{2mq_1^2} + U(q_1) \quad (502)$$

ist wieder erhalten

$$\begin{aligned}
 \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial H}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial H}{\partial p_1} \dot{p}_1 + \frac{\partial H}{\partial p_2} \dot{p}_2 \\
 &= \left(-\frac{L^2}{mq_1^3} + \frac{\partial U}{\partial q_1} \right) \frac{p_1}{m} + 0 + \frac{p_1}{m} (-) \left(-\frac{L^2}{mq_1^3} + \frac{\partial U}{\partial q_1} \right) + 0 \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{503}$$

16.2.2 Teilchen im Elektromagnetischen Feld

In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass aus folgender Lagrange-Funktion

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\vec{q}}^2 + \frac{q}{c} \dot{\vec{q}} \cdot \vec{A}(\vec{q}, t) - q\phi(\vec{q}, t) \tag{504}$$

die Lorentz-Kraft abgeleitet werden kann.

Die kanonisch konjugierten Impulse lauten in diesem Fall

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i + \frac{q}{c} A_i(\vec{q}, t). \tag{505}$$

Diese Gleichung kann nach der Geschwindigkeit \dot{q}_i aufgelöst werden

$$\dot{q}_i = \frac{p_i}{m} - \frac{q}{mc} A_i(\vec{q}, t). \tag{506}$$

Damit erhalten wir für die Hamilton-Funktion

$$\begin{aligned}
 H(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) &= \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - \frac{m}{2} \dot{\vec{q}}^2 - \frac{q}{c} \dot{\vec{q}} \cdot \vec{A}(\vec{q}, t) + q\phi(\vec{q}, t) \\
 &= \vec{p} \cdot \left(\frac{\vec{p}}{m} - \frac{q}{mc} \vec{A} \right) - \frac{m}{2} \left(\frac{\vec{p}}{m} - \frac{q}{mc} \vec{A} \right)^2 - \frac{q}{c} \left(\frac{\vec{p}}{m} - \frac{q}{mc} \vec{A} \right) \cdot \vec{A} + q\phi \\
 &= \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{q}{mc} \vec{p} \cdot \vec{A} (-1 + 1 - 1) + \frac{q^2}{mc^2} \vec{A} \cdot \vec{A} (-1/2 + 1) + q\phi, \\
 H(\vec{q}, \vec{p}, t) &= \frac{(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}(\vec{q}, t))^2}{2m} + q\phi(\vec{q}, t).
 \end{aligned} \tag{507}$$

Bemerkungen:

1. Der kanonisch konjugierte Impuls lautet

$$\vec{p} = m\dot{\vec{q}} + \frac{q}{c} \vec{A}. \tag{508}$$

Der kinematische Impuls lautet

$$m\dot{\vec{q}} = \vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}. \tag{509}$$

2. **Minimale Kopplung:** Ausgehend von der Hamilton-Funktion eines freien Teilchens

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \frac{\vec{p}^2}{2m} \quad (510)$$

kann man die elektromagnetische Wechselwirkung einbauen, in dem man folgende Ersetzungen macht

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}, \quad H \rightarrow H + q\phi. \quad (511)$$

Diese Ersetzung wird auch minimale Kopplung genannt und sie wird in der Quantenmechanik, sowie in der Quantenfeldtheorie benutzt - auch für die starke und schwache Wechselwirkung!

Die Lagrange-Funktion erhält man durch die Legendre-Transformation der Hamilton-Funktion.

Funktioniert das auch mit Ersetzungen in der freien Lagrange-Funktion?

$$L = T - U = \frac{m}{2} \dot{\vec{q}}^2.$$

$$\dot{\vec{q}} \rightarrow \dot{\vec{q}} + \frac{q}{mc} \vec{A}, \quad L \rightarrow L - q\phi.$$

Daraus folgt

$$L \rightarrow \frac{m}{2} \left(\dot{\vec{q}} + \frac{q}{mc} \vec{A} \right)^2 - q\phi = \frac{m}{2} \dot{\vec{q}}^2 + \frac{q}{c} \dot{\vec{q}} \cdot \vec{A} + \frac{q^2}{2mc^2} \vec{A}^2 - q\phi.$$

Hier ist nun ein zusätzlicher Term proportional zu \vec{A}^2 . Die partielle Ableitung der Lagrange-Funktion nach den Koordinaten ergibt dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_i} &= -q \frac{\partial \phi}{\partial q_i} + \frac{q}{c} \dot{\vec{q}} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial q_i} + \frac{q^2}{mc^2} \vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial q_i}, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= m \dot{q}_i + \frac{q}{c} A_i, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= m \ddot{q}_i + \frac{q}{c} \left[\sum_{k=1}^f \frac{\partial A_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial A_i}{\partial t} \right]. \end{aligned}$$

Und somit

$$q \left[-\frac{\partial \phi}{\partial q_i} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right] + \frac{q}{c} \sum_{k=1}^f \dot{q}_k \cdot \left[\frac{\partial A_k}{\partial q_i} - \frac{\partial A_i}{\partial q_k} \right] + \frac{q^2}{mc^2} \vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial q_i} = m \ddot{q}_i.$$

17 Noether-Theorem

17. Vorlesung: Freitag 16.12.2022 — [Scheck](#)

17.1 Noether-Theorem

Eines der fundamentalsten Prinzipien in der modernen Physik ist die Verbindung von Symmetrien mit Erhaltungssätzen.

Wir werden uns diesem tiefen Zusammenhang mit einer Reihe von Beispielen annähern. Zunächst untersuchen wir Erhaltungsgrößen in verschiedenen Lagrange-Funktionen:

1. **Beispiel 1:** Als erstes Beispiel betrachten wir

$$L = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - V(q_1 - q_2). \quad (512)$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen ergeben nun

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\dot{q}_1) &= -\frac{\partial V(q_1 - q_2)}{\partial q_1} = -V'(q_1 - q_2), \\ \frac{d}{dt}(m\dot{q}_2) &= -\frac{\partial V(q_1 - q_2)}{\partial q_2} = +V'(q_1 - q_2). \end{aligned} \quad (513)$$

Addiert man die beiden Gleichungen so erhält man

$$\dot{p}_1 + \dot{p}_2 = 0, \quad (514)$$

d.h. die Summe der Impulse p_1 und p_2 ist erhalten.

2. **Beispiel 2:** Wir betrachten nun

$$L = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - V(aq_1 - bq_2). \quad (515)$$

Die Bewegungsgleichungen lauten nun

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -aV'(aq_1 - bq_2), \\ \dot{p}_2 &= +bV'(aq_1 - bq_2). \end{aligned} \quad (516)$$

D.h. nun ist die Summe $b\dot{p}_1 + a\dot{p}_2$ erhalten.

Führt man die neuen Koordinaten

$$\begin{aligned} q_- &= aq_1 - bq_2, \\ q_+ &= bq_1 + aq_2 \end{aligned} \quad (517)$$

ein, so findet man

$$L = \frac{m}{2(a^2 + b^2)} (\dot{q}_-^2 + \dot{q}_+^2) - V(q_-). \quad (518)$$

q_+ ist also eine zyklische Koordinate und der zugehörige Impuls p_+ ist eine Erhaltungsgröße

Als nächstes betrachten wir Koordinatentransformationen: wir transformieren die ursprünglichen Koordinaten q_i auf einen neuen Satz q'_i

$$q_i \rightarrow q'_i = q'_i(q_i). \quad (519)$$

Hier gibt es nun zwei mögliche Sichtweisen auf die Transformationen:

1. **Passive Transformation:** Hier nehmen wir an, dass nichts mit dem physikalischen System passiert und wir einfach die Koordinaten neu bezeichnen. Lautet die Transformation

$$x \rightarrow x' = x + 1, \quad (520)$$

dann geben wir einem Teilchen das ursprünglich am Punkt $x = 3$ nun einfach die Koordinate $x' = 4$, ohne das Teilchen zu bewegen.

2. **Aktive Transformation:** Hier nehmen wir an, dass das physikalische System wirklich modifiziert wird. Lautet die Transformation

$$x \rightarrow x' = x + 1, \quad (521)$$

dann bewegen wir ein Teilchen das ursprünglich am Punkt $x = 3$ zum Punkt $x' = 4$.

Im Folgenden verfolgen wir die aktive Betrachtung von Koordinatentransformationen, d.h. eine Transformation wird im allgemeinen die Physik verändern, z.B. unterschiedliche Werte vom Potential.

Defintion: Eine **Symmetrie** ist eine aktive Koordinatentransformation, die den Wert der Lagrange-Funktion nicht ändert.

Beispiele:

- Als einfachstes Beispiel betrachten wir

$$L = m \frac{\dot{q}^2}{2}. \quad (522)$$

Ändern wir die Koordinaten wie folgt:

$$q \rightarrow q + \delta, \quad (523)$$

wobei δ zeitunabhängig ist, dann gilt

$$\dot{q} \rightarrow \dot{q} \quad (524)$$

und somit

$$L \rightarrow L. \quad (525)$$

Die freie Lagrange-Funktion ist also invariant unter Translation der Koordinaten. Diese Invarianz wird als **Raumtranslationsinvarianz** bezeichnet.

- Betrachten wir hingegen ein beliebiges Potential

$$L = m \frac{\dot{q}^2}{2} + V(q), \quad (526)$$

so ist die zugehörige Lagrange-Funktion im allgemeinen nicht invariant unter Translation der Koordinaten.

- **Beispiel 1:** im ersten Beispiel oben

$$L = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - V(q_1 - q_2) \quad (527)$$

finden wir eine Invarianz der Lagrange-Funktion unter der Transformation

$$\begin{aligned} q_1 &\rightarrow q_1 + \delta, \\ q_2 &\rightarrow q_2 + \delta. \end{aligned} \quad (528)$$

- **Beispiel 2:** im zweiten Beispiel oben

$$L = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - V(aq_1 - bq_2), \quad (529)$$

finden wir eine Invarianz der Lagrange-Funktion unter der Transformation

$$\begin{aligned} q_1 &\rightarrow q_1 + b\delta, \\ q_2 &\rightarrow q_2 - a\delta. \end{aligned} \quad (530)$$

- **Beispiel 3:** betrachten wir nun

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(x^2 + y^2) \quad (531)$$

so erwarten wir eine Invarianz der Lagrange-Funktion unter Drehungen, da hier das Argument des Potentials konstant bleibt.

Ein Drehung im 2 dimensionalen Raum sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\ y &\rightarrow y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi. \end{aligned} \quad (532)$$

Betrachten wir infinitesimal kleine Drehwinkel δ , so erhalten wir für die infinitesimale Transformation

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x' = x + y\delta, \\ y &\rightarrow y' = -x\delta + y. \end{aligned} \quad (533)$$

Betrachten wir eine infinitesimale kleine, zeitunabhängige Rotation δ , so ergibt sich damit für die Geschwindigkeiten

$$\begin{aligned} \dot{x} &\rightarrow \dot{x}' = \dot{x} + \dot{y}\delta, \\ \dot{y} &\rightarrow \dot{y}' = -\dot{x}\delta + \dot{y}. \end{aligned} \quad (534)$$

Unter diesen Transformationen ist die Lagrange-Funktion L invariant, da

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\rightarrow (x + y\delta)^2 + (y - x\delta)^2 = x^2 + y^2 - (xy - yx)\delta + (x^2 + y^2)\delta^2 \\ &= x^2 + y^2 + \mathcal{O}(\delta^2), \end{aligned} \quad (535)$$

analog für die Geschwindigkeiten. Die infinitesimale Transformation kann auch wie folgt ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \delta x &= y\delta, \\ \delta y &= -x\delta. \end{aligned} \quad (536)$$

Nun verallgemeinern wir unsere infinitesimalen Transformation zu

$$\delta q_i = f_i(q)\delta. \quad (537)$$

1. Beispiel 1

$$f_i = 1, \quad f_2 = 1. \quad (538)$$

2. Beispiel 2

$$f_i = a, \quad f_2 = b. \quad (539)$$

3. Beispiel 3

$$f_1 = y, \quad f_2 = -x. \quad (540)$$

Für die verallgemeinerten Geschwindigkeiten folgt dann

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}(\delta q_i) = \dot{f}_i(q)\delta. \quad (541)$$

Definition: Eine kontinuierliche **Symmetrie** ist eine infinitesimale Koordinatentransformation, die den Wert der Lagrange-Funktion nicht ändert.

Betrachten wir nun die allgemeine Änderung von $L(q, \dot{q})$ unter infinitesimalen Koordinatentransformationen

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right) \\ &= \sum_i \left(p_i \dot{f}_i(q)\delta + \dot{p}_i f_i(q)\delta \right) \\ &= \frac{d}{dt} \sum_i (p_i f_i(q)) \delta. \end{aligned} \quad (542)$$

Nun haben den gesuchten Zusammenhang: Ist die infinitesimale Transformation f_i eine Symmetrie der Lagrange-Funktion, d.h. $\delta L = 0$, dann gibt es eine zugehörige Erhaltungsgröße

$$Q = \sum_i p_i f_i(q). \quad (543)$$

1. Beispiel 1

$$f_i = 1, f_2 = 1 \Rightarrow Q = p_1 + p_2. \quad (544)$$

Dies ist der Gesamtimpuls.

Ist ein System invariant unter gleichzeitiger Translation aller Koordinaten, dann ist der Gesamtimpuls erhalten.

2. Beispiel 2

$$f_i = a, f_2 = b \Rightarrow Q = ap_1 + bp_2. \quad (545)$$

3. Beispiel 3

$$f_1 = y, f_2 = -x \Rightarrow Q = yp_x - xp_y. \quad (546)$$

Dies ist der Drehimpuls!

Ist ein System invariant unter gleichzeitiger Rotation aller Koordinaten, dann ist der Drehimpuls erhalten.

Emmy Noether, 1882 in Erlangen - 1935 in Pennsylvania

- Vater Mathematik Professor
- Mädchen an Gymnasien nicht erlaubt
- ab 1903 Frauen an bayerischen Gymnasien zugelassen
- 2. deutsche Mathematik Promotion, in diesem Falle: *summa cum laude* in Erlangen
- Göttingen: von Klein und Hilbert eingeladen
- 1919 erste habilitierte Mathematikerin in Deutschland
- 1933 in USA, erste angemessen bezahlte Stelle

18 Noether-Theorem II

18. Vorlesung: Dienstag 19.12.2022 — [Scheck 2.23...2.28](#)

18.1 Symmetrien und Erhaltungssätze

Wir betrachten nun abgeschlossene, autonome Systeme mit f Freiheitsgraden, denen die Lagrange-Funktion $L(\underline{\vec{q}}, \dot{\underline{\vec{q}}})$ (nicht explizit zeitabhängig) zugeordnet ist.

Weiter sei L in der natürlichen Form gegeben.

$$L(\underline{\vec{q}}, \dot{\underline{\vec{q}}}) = T(\underline{\vec{q}}, \dot{\underline{\vec{q}}}) - U(\underline{\vec{q}}). \quad (547)$$

T sei weiter eine homogene Funktion zweiten Grades in $\dot{\underline{\vec{q}}}$, d.h.

$$T(\underline{\vec{q}}, \lambda \dot{\underline{\vec{q}}}) = \lambda^2 T(\underline{\vec{q}}, \dot{\underline{\vec{q}}}), \quad (548)$$

dann gilt nach dem Eulerschen Satz

$$\sum_{i=1}^f \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T. \quad (549)$$

Damit erhalten wir

$$\sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - L = \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \sum_{i=1}^f \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = 2T - T + U = T + U = E. \quad (550)$$

Dies ist die Energie des Systems, die erhalten ist:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - \frac{dL}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^f (\dot{p}_i \dot{q}_i + p_i \ddot{q}_i) - \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} = 0. \end{aligned} \quad (551)$$

18.2 Noether-Theorem II

Nun das Ganze etwas formaler: wir betrachten Koordinatentransformationen die kontinuierlich in die Einheitsabbildung überführt werden können. Ist die Lagrange-Funktion unter diesen Abbildungen invariant, dann gibt es Erhaltungsgrößen (Integrale der Bewegung).

Satz: Die Lagrange-Funktion $L(q, \dot{q})$ eines autonomen Systems sei unter Transformationen $q \rightarrow h^s(q)$ invariant, wobei s ein kontinuierlicher Parameter ist und $h^{s=0}(q) = q$ die Identität ist. Es gibt dann ein Integral der Bewegung

$$I(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{ds} h^s(q_i) \Big|_{s=0}. \quad (552)$$

Beweis: Es sei $q(t)$ eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen. Nach Voraussetzung ist auch $q(s, t) = h^s[q(t)]$ eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen für alle s , d.h.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L[q(s, t), \dot{q}(s, t)]}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L[q(s, t), \dot{q}(s, t)]}{\partial q_i}, \quad (553)$$

mit $i = 1, \dots, f$.

Ausserdem ist nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} L[q(s, t), \dot{q}(s, t)] \Big|_{s=0} &= \sum_{i=0}^f \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{dh^s(q_i)}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{h}^s(q_i)}{ds} \right) \Big|_{s=0} = 0 \\ &= \sum_{i=0}^f \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{dh^s(q_i)}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \left(\frac{dh^s(q_i)}{ds} \right) \right] \Big|_{s=0} \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{dh^s(q_i)}{ds} \Big|_{s=0}. \end{aligned} \quad (554)$$

Beispiele:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n m_p \dot{r}_p^2 - U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n). \quad (555)$$

1. Das System sei invariant unter Translationen entlang der x -Achse:

$$h^s : \vec{r}_p \rightarrow \vec{r}_p + s\vec{e}_x. \quad (556)$$

Dann lautet die Erhaltungsgröße

$$I(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{ds} h^s(q_i) \Big|_{s=0} = \sum_{i=1}^f m_p \dot{\vec{r}}_p \cdot \vec{e}_x = \sum_{i=1}^f p_{p,x}. \quad (557)$$

D.h. die Summe der x -Komponenten der Impulse ist erhalten.

2. Das System sei invariant unter Drehungen um die z -Achse:

$$\begin{aligned} h^s : \vec{r}_p &\rightarrow \vec{r}'_p(s), \\ x'_p &= x_p \cos s + y_p \sin s, \\ y'_p &= -x_p \sin s + y_p \cos s, \\ z'_p &= z_p. \end{aligned} \quad (558)$$

Damit gilt

$$\frac{d}{ds} \vec{r}'_p(s) \Big|_{s=0} = \begin{pmatrix} -x_p \sin s + y_p \cos s \\ -x_p \cos s - y_p \sin s \\ 0 \end{pmatrix} \Big|_{s=0} = \begin{pmatrix} y_p \\ -x_p \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{r}_p \times \vec{e}_z \quad (559)$$

und somit lautet die Erhaltungsgröße

$$I(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^f m_p \dot{\vec{r}}_p \cdot \vec{r}_p \times \vec{e}_z = \vec{e}_z \cdot \sum_{i=1}^f m_p \dot{\vec{r}}_p \times \vec{r}_p = L_z. \quad (560)$$

D.h. die z -Komponente des Gesamtdrehimpulses ist erhalten.

18.3 Drehungen

Infinitesimale Drehungen um die z -Achse können wie folgt geschrieben werden

$$\begin{aligned} h^s(\vec{r}) &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \mathcal{O}(s^2) \\ &= (\mathbb{1} - sJ_z)\vec{r} + \mathcal{O}(s^2). \end{aligned} \quad (561)$$

Man nennt J_z die **Erzeugende** der Drehungen um die z -Achse. Eine endliche Drehung um die z -Achse, $R_z(\varphi)$ kann als Exponentialfunktion dargestellt werden.

$$R_z(\varphi) = \exp(-J_z\varphi). \quad (562)$$

Beweis: Betrachte die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (563)$$

für die gilt

$$M^2 = -\mathbb{1}, M^3 = -M, M^4 = \mathbb{1}. \quad (564)$$

Betrachtet man nun die Drehmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (565)$$

so kann man deren Taylor-Entwicklung wie folgt schreiben

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \varphi^{2n} - M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \varphi^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} M^{2n} \varphi^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} M^{2n+1} \varphi^{2n+1} \\ &= \exp(-M\varphi). \end{aligned} \quad (566)$$

Analog kann man die Erzeugenden der Drehungen um die x -, y - und z -Achse schreiben als

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (567)$$

Man kann durch Nachrechnen zeigen, dass diese Matrizen die $SU(2)$ -Algebra erfüllen.

$$[iJ_i, iJ_j] = i\epsilon_{ijk}(iJ_k). \quad (568)$$

Bemerkung: mit dieser Relation kann in der Quantenmechanik der Drehimpulsoperator definiert werden.

18.4 Kanonische Transformationen

Die Wahl der verallgemeinerten Koordinaten (und damit der verallgemeinerten Impulse) ist nicht eindeutig!

Versuch: Koordinatentransformation, derart, dass einige oder alle Koordinaten zyklisch sind.

Eine Koordinate Q_k heisst zyklisch, wenn

$$\frac{\partial L}{\partial Q_k} = 0. \quad (569)$$

Dann ist der kanonisch konjugierte Impuls

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k} \quad (570)$$

erhalten, d.h. $\dot{P}_k = 0$. Nach den kanonischen Gleichungen folgt daraus

$$\dot{P}_k = -\frac{\partial H}{\partial Q_k} = 0, \quad (571)$$

die Hamilton-Funktion ist also auch unabhängig von der zyklischen Koordinate Q_k und der zugehörige kanonische Impuls ist eine erhaltene Größe $P_k = \alpha_k = const.$.

Nun wird das System durch

$$H = H(Q_1, \dots, Q_{k-1}, Q_{k+1}, \dots, Q_f; P_1, \dots, P_{k-1}, \alpha_k, P_{k+1}, \dots, P_f, t) \quad (572)$$

beschrieben, und es gibt nur noch $f - 1$ Freiheitsgrade.

Sind alle Koordinaten zyklisch, so findet man

$$H = H(\alpha_1, \dots, \alpha_f, t) \quad (573)$$

und die kanonischen Gleichungen können elementar gelöst werden:

$$\begin{aligned} \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i} = 0 &\Rightarrow P_i = \alpha_i, \\ \dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} \Big|_{P_i=\alpha_i} = v_i(t) &\Rightarrow Q_i = \int_{t_0}^t v_i(t') dt' + \beta_i. \end{aligned} \quad (574)$$

Die $2f$ Größen (α_i, β_i) sind Integrationskonstanten.

Kann man Koordinaten so transformieren, dass alle Koordinaten zyklisch werden?

19 Wiederholung und Poisson

19. Vorlesung: Dienstag 10.1.2023 — [Scheck 2.29...2.30](#)

19.1 Wiederholung

1. Newton'sche Darstellung der Mechanik: gut für Reibung.
 - 1-Dimensionale Probleme: mathematisches Pendel (elliptische Integrale).
 - 2-Körperproblem: Relativbewegung plus Drehimpulserhaltung \Rightarrow 1-dimensionales Problem mit effektivem Potential, numerische und analytische Lösung (Lenz-Runge-Vektor, Rosettenbahnen). In Übungen Streuung.
 - Erhaltungssätze: Impuls, Energie, Drehimpuls, Schwerpunkt.
 - Galilei-Transformationen: Gruppentheorie.
 - Harmonische Oszillationen: frei, erzwungen, gedämpft, erzwungen und gedämpft - im letzteren Fall kann auch Chaos auftreten!
2. Lagrange-Darstellung der Mechanik: gut für beliebige Koordinatensysteme auch beschleunigte und Zwangsbedingungen.
 - Zwangsbedingungen.
 - D'Alembertsches Prinzip

$$Q_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} T \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} T. \quad (575)$$

- Lagrange-Gleichungen (bei Potentialkräften)

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} L \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} L = 0}. \quad (576)$$

f Differentialgleichungen 2.ter Ordnung.

- Prinzip der stationären Wirkung.
- Lagrange-Funktion ist nicht eindeutig.
 - Natürliche Form: $L = T - U$.

- Invariant unter $L \rightarrow L + d/dtM(q, t)$.
- Invariant unter Transformationen der verallgemeinerten Koordinaten: $Q = Q(q)$.
- q_i ist eine zyklische Koordinate, wenn $\partial L/\partial q_i = 0$.
Aus den Euler-Lagrange-Gleichungen folgt dann: $\partial L/\partial \dot{q}_i$ ist eine Erhaltungsgröße. Beachte: das bedeutet im allgemeinen nicht, dass \dot{q}_i eine Erhaltungsgröße ist!
Beispiel: zweidimensionale freie Bewegung einer Masse m in einer Ebene gilt

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r). \quad (577)$$

φ ist hier eine zyklische Koordinate, d.h. $mr^2\dot{\varphi}$ ist erhalten, aber nicht $\dot{\varphi}$ und die Lagrange-Funktion hängt somit von drei unabhängigen Variablen ab, $L = L(r, \dot{r}, \dot{\varphi})$.

- Die Lagrange-Funktion ist keine Konstante der Bewegung

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_k (p_k \dot{q}_k) + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (578)$$

- Noether-Theorem:

V1.0: L unter $q \rightarrow q + \delta q = q + f(q)\delta$ invariant $\Rightarrow pf(q)$ erhalten.

V1.1: **Satz:** Die Lagrange-Funktion $L(q, \dot{q})$ eines autonomen Systems sei unter Transformationen $q \rightarrow h^s(q)$ invariant, wobei s ein kontinuierlicher Parameter ist und $h^{s=0}(q) = q$ die Identität ist.

Es gibt dann ein Integral der Bewegung

$$I(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{ds} h^s(q_i) \Big|_{s=0}. \quad (579)$$

3. Hamilton-Darstellung der Mechanik: wie Lagrange, zusätzlich besser bei zyklischen Koordinaten.

Kanonisch konjugierter Impuls:

$$p := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}. \quad (580)$$

Hamilton-Funktion

$$H := \dot{q}p - L. \quad (581)$$

Ersetze \dot{q} durch q und p : $\dot{q} = \dot{q}(q, p)$ und erhalte dann $H = H(q, p)$.

Formal ist dies eine Legendre-Transformation $L(q, \dot{q}) \rightarrow H(q, p)$.

Beispiel:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - U(q) \rightarrow H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + U(q). \quad (582)$$

- Phasenraum - Kapitel 8,9,10.

$$p = \pm \sqrt{2m [E - U(q)]}. \quad (583)$$

Phasenraumtrajektorien schneiden sich nicht! Jeder Punkt im Phasenraum entspricht spezifischen Anfangsbedingungen.

Beispiele: Oszillator, mathematisches Pendel.

- Kanonische Gleichungen:

$$\dot{p}_l = -\frac{\partial H}{\partial q_l}, \quad \dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p_l}. \quad (584)$$

2f Differentialgleichungen erster Ordnung.

- Zyklische Koordinaten.

Beispiel: für die zweidimensionale freie Bewegung einer Masse m in einer Ebene gilt:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r). \quad (585)$$

Die verallgemeinerten Impulse lauten

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}. \quad (586)$$

φ ist eine zyklische Koordinate, und der zugehörige Kanonisch konjugierte Impuls p_φ ist erhalten, $p_\varphi = L = const..$ Damit lautet die Hamilton-Funktion

$$H(r, p_r) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r). \quad (587)$$

Die Hamilton-Funktion hängt nun von nur zwei Variablen ab. D.h. im Falle von zyklischen Koordinaten, scheint der Hamilton-Formalismus einfacher als der Lagrange-Formalismus zu sein.

- Minimale Kopplung: die elektromagnetische Wechselwirkung kann *eingebaut* werden, indem man in der freien Hamilton-Funktion folgende Ersetzungen macht.

$$\begin{aligned} \vec{p} &\rightarrow \vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}, \\ H &\rightarrow H + q\phi. \end{aligned} \quad (588)$$

19.2 Variationsprinzipien auf Hamilton-Funktion

Man kann die kanonischen Gleichungen (Hamiltonschen Gleichungen) aus dem Extremalprinzip, angewandt auf

$$F(\underline{\vec{q}}, \underline{\vec{p}}, \dot{\underline{\vec{q}}}, \dot{\underline{\vec{p}}}, t) = \sum_{k=1}^f p_k \dot{q}_k - H(\underline{\vec{q}}, \underline{\vec{p}}, t) \quad (589)$$

ableiten. Hierbei entspricht (im Vergleich zu Kap. 13.3)

$$\begin{aligned} (\underline{\vec{q}}, \underline{\vec{p}}) &\rightarrow y, \\ (\dot{\underline{\vec{q}}}, \dot{\underline{\vec{p}}}) &\rightarrow y', \\ t &\rightarrow x \end{aligned} \quad (590)$$

und wir fordern nun, dass

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} F dt = 0, \quad (591)$$

wobei man die q_k und p_k unabhängig variiert.

Damit erhält man die Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta q_k} = 0 &\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial F}{\partial q_k} \Rightarrow \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \\ \frac{\delta F}{\delta p_k} = 0 &\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{p}_k} = \frac{\partial F}{\partial p_k} \Rightarrow 0 = \dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \end{aligned} \quad (592)$$

was äquivalent zu den kanonischen Gleichungen ist.

19.3 Poisson-Klammern

Betrachte eine allgemeine Funktion F , die von den Koordinaten und den Impulsen abhängt

$$F = F(q, p). \quad (593)$$

F ist eine Funktion der Trajektorie im Phasenraum und besitzt dadurch eine implizite Zeitabhängigkeit.:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right). \end{aligned} \quad (594)$$

Definition: Die Poisson-Klammer zweier Phasenraumfunktionen $F = F(q, p)$ und $G = G(q, p)$ ist definiert als

$$\{F, G\} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right). \quad (595)$$

Somit kann die Zeitabhängigkeit der Phasenraumfunktion F als Poisson-Klammer von F mit der Hamilton-Funktion H geschrieben werden

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\}. \quad (596)$$

Hängt die Funktion F auch noch explizit von der Zeit ab, so erhalten wir

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (597)$$

Als Spezialfälle erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{q}_k &= \{q_k, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \\ \dot{p}_k &= \{p_k, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}. \end{aligned} \quad (598)$$

Basierend auf der Poisson-Klammer kann nun eine 4. Formulierung der Mechanik angegeben werden.

19.4 Axiomatische Formulierung der Mechanik

A , B und C sind Phasenraumfunktionen, d.h. $A = A(q, p)$, $B = B(q, p)$ und $C = C(q, p)$.

Die Poisson-Klammer von A und B ist definiert als

$$\{A, B\} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right). \quad (599)$$

Die Poisson-Klammer besitzt folgende Eigenschaften

1. Anti-Symmetrie:

$$\{A, B\} = -\{B, A\}. \quad (600)$$

2. Linearität

$$\begin{aligned}\{\alpha A, B\} &= \alpha \{A, B\} \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R}, \\ \{A + B, C\} &= \{A, C\} + \{B, C\} .\end{aligned}\tag{601}$$

3. Produktregel

$$\{(AB), C\} = B \{A, C\} + A \{B, C\} .\tag{602}$$

4. Jacobi-Identität

$$\{A, \{B, C\}\} + \{C, \{A, B\}\} + \{B, \{C, A\}\} = 0 .\tag{603}$$

Beachte: Die Lie-Klammer von zwei Operatoren (z.B. Matrizen \hat{A} und \hat{B}) besitzt diesselben Eigenschaften

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} .\tag{604}$$

Die Poisson-Klammer ist ein Spezialfall einer Lie-Klammer.

Mit der Hilfe der Poisson-Klammer lautet die vierte Formulierung der Mechanik:

Die Zeitabhängigkeit jeder beliebigen Funktion F von den Koordinaten und Impulsen, ist gegeben durch

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} .\tag{605}$$

19.5 Spezielle Poisson-Klammern

1. Koordinaten:

$$\{q_i, q_j\} = 0 .\tag{606}$$

2. Impulse:

$$\{p_i, p_j\} = 0 .\tag{607}$$

3. Koordinaten und Impulse:

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}. \quad (608)$$

$$\{q^n, p\} = nq^{n-1} = \frac{dq^n}{dq}. \quad (609)$$

$$\{F(q), p\} = \frac{dF}{dq}. \quad (610)$$

$$\{F(q, p), p_i\} = \frac{\partial F}{\partial q_i}. \quad (611)$$

$$\{F(q, p), q_i\} = -\frac{\partial F}{\partial p_i}. \quad (612)$$

19.6 Übergang zur Quantenmechanik

Crashkurs:

- In der Quantenmechanik wird ein Teilchen durch eine Wellenfunktion $\Psi(\vec{x}, t)$ beschrieben.
- $|\Psi(\vec{x}, t)|^2$ gibt die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens am Ort \vec{x} zum Zeitpunkt t an
- Messgrößen (Observablen) werden durch Operatoren (Matrizen) beschrieben.
Der Ort eines Teilchens kann durch die Anwendung des Ortsoperators \hat{X} auf die Wellenfunktion bestimmt werden.
Der Impuls eines Teilchens kann durch die Anwendung des Impulsoperators \hat{P} auf die Wellenfunktion bestimmt werden.
- Die Quantenmechanik kann vollständig definiert werden durch die Zeitentwicklung von Operatoren \hat{A} die auf Wellenfunktionen Ψ wirken. Die Wellenfunktion eines Teilchens beschreibt die Aufenthaltswahrscheinlichkeit desselbigen. Es gilt

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{A}, \hat{H}] + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}. \quad (613)$$

- Beim Übergang von Mechanik zu Quantenmechanik muss also lediglich folgende Ersetzung gemacht werden

$$\{A, B\} \rightarrow -\frac{i}{\hbar} [\hat{A}, \hat{B}]. \quad (614)$$

- Insbesondere gilt für die Vertauschungsrelationen von Ort und Impuls

$$\begin{aligned} [\hat{X}, \hat{X}] &= 0, \\ [\hat{P}, \hat{P}] &= 0, \\ [\hat{X}, \hat{P}] &= i\hbar. \end{aligned} \quad (615)$$

Letztere Gleichung ist gleichbedeutend mit der Unschärferelation, d.h. Ort und Impuls können nicht gleichzeitig genau gemessen werden.

- Wie in der Mechanik, gibt es auch verschiedene Darstellungen der Quantenmechanik. Neben dem hier gezeigten Äquivalent zur Poisson-Darstellung, kann die sogenannte Schrödinger-Gleichung als Äquivalent zur Newton-Darstellung der Mechanik angesehen werden.

20 Poisson II, Routhsche Funktion und kanonische Transformationen

20. Vorlesung: Freitag 13.1.2023 — [Scheck 2.29...2.30](#)

20.1 Anwendungen der Poisson-Klammern

20.1.1 Äquivalenz zu den Newtonschen Gleichungen

Ausgehend von der Hamilton-Funktion

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (616)$$

und den Zeitentwicklungsgleichungen für q und p

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \{q, H\} , \\ \dot{p} &= \{p, H\} \end{aligned} \quad (617)$$

erhalten wir wieder die Newtonschen Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \{q, H\} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} , \\ \dot{p} &= \{p, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q} \end{aligned} \quad (618)$$

und somit

$$m\ddot{q} = \dot{p} = -\frac{\partial V}{\partial q} = F . \quad (619)$$

20.1.2 Drehimpulse

Eine Rotation in der (x, y) Ebene ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \delta x &= -y\delta , \\ \delta y &= x\delta . \end{aligned} \quad (620)$$

Invarianz unter Rotationen ergibt die Erhaltung vom Drehimpuls

$$L_z = xp_y - yp_x . \quad (621)$$

Berechnen wir nun die Poisson-Klammern von Koordinaten mit der z -Komponente vom Drehimpuls, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \{x, L_z\} &= \frac{\partial x}{\partial x} \frac{\partial L_z}{\partial p_x} - \frac{\partial x}{\partial p_x} \frac{\partial L_z}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial L_z}{\partial p_y} - \frac{\partial x}{\partial p_y} \frac{\partial L_z}{\partial y} \\
 &= -y - 0 + 0 - 0 = \frac{1}{\delta} \delta x, \\
 \{y, L_z\} &= \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial L_z}{\partial p_x} - \frac{\partial y}{\partial p_x} \frac{\partial L_z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} \frac{\partial L_z}{\partial p_y} - \frac{\partial y}{\partial p_y} \frac{\partial L_z}{\partial y} \\
 &= 0 - 0 + x - 0 = \frac{1}{\delta} \delta y, \\
 \{z, L_z\} &= 0 = \frac{1}{\delta} \delta z.
 \end{aligned} \tag{622}$$

In diesem Fall: Poisson-Klammer von Koordinaten mit Erhaltungsgröße ergibt das Transformationsverhalten der Koordinaten.

Allgemein erhält man für den Drehimpuls

$$\{q_i, L_j\} = \sum_k \epsilon_{ijk} q_k. \tag{623}$$

Ebenso ergibt sich für die Poisson-Klammer von Impuls und Drehimpuls

$$\{p_i, L_j\} = \sum_k \epsilon_{ijk} p_k. \tag{624}$$

D.h. Koordinaten und Impulse haben diesselben Poisson-Klammern mit dem Drehimpuls, das deutet wiederum dartaufhin, dass Koordinaten und Impulse sich gleich unter Rotationen transformieren.

Beh.: Um die Transformationseigenschaften einer Größe F unter Rotationen zu bestimmen, berechnet man

$$\delta F = \{F, L_j\}. \tag{625}$$

Die Drehimpulse L_j werden daher auch als Generatoren der Rotationen bezeichnet.

Schliesslich findet man noch

$$\{L_i, L_j\} = \sum_k \epsilon_{ijk} L_k. \tag{626}$$

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir nun einen elektrisch geladenen Kreis in einem Magnetfeld \vec{B} in z -Richtung, die führt zu einem Wechselwirkungsterm im Hamiltonian proportional zu $\omega \vec{B} \cdot \vec{L}$, den Wechselwirkungsterm inklusive Proportionalitätskonstanten bezeichnen wir mit $H = \omega L_z$. Damit erhalten wir für die Zeitabhängigkeit der Drehimpulse

$$\begin{aligned}\dot{L}_x &= \{L_x, H\} = \omega \{L_x, L_z\} = -\omega L_y, \\ \dot{L}_y &= \{L_y, H\} = \omega \{L_y, L_z\} = \omega L_x, \\ \dot{L}_z &= \{L_z, H\} = \omega \{L_z, L_z\} = 0.\end{aligned}\tag{627}$$

Diese Gleichungen beschreiben eine Rotation von L_x und L_y mit der Frequenz ω .

Problem grundsätzlich gelöst, ohne Detailwissen!

20.2 Routhsche Funktion

Bisher: Lagrange-Formalismus ist sehr effektiv, bei zyklischen Koordinaten scheint der Hamilton-Formalismus effektiver zu sein.

Idee: verbinde beide Formalismen.

- Verallgemeinerte Koordinaten: q_1, \dots, q_f
- Zyklische Koordinaten: q_1, \dots, q_s
- Nicht-zyklische Koordinaten: q_{s+1}, \dots, q_f

Definition: Die Routhsche Funktion ist definiert als

$$R(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_s, \dot{q}_{s+1}, \dots, \dot{q}_f) = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f).\tag{628}$$

D.h. für die zyklischen Koordinaten ist eine Legendre-Transformation durchgeführt worden und es gelten die kanonischen Gleichungen

$$\frac{\partial R}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial R}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \quad \text{for } i = 1, \dots, s.\tag{629}$$

Für die nicht-zyklischen Koordinaten gilt weiterhin der Lagrange-Formalismus

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial R}{\partial q_i} \quad \text{for } i = s + 1, \dots, f.\tag{630}$$

Beachte: die Routhsche Funktion hängt nicht von den zyklischen Koordinaten ab und die dazugehörigen Impulse sind konstant $p_1 = \alpha_i$

$$R = R(q_{s+1}, \dots, q_f, \alpha_1, \dots, \alpha_s, \dot{q}_{s+1}, \dots, \dot{q}_f) \quad (631)$$

Beispiel: Masse m im dreidimensionalen Raum mit radialsymmetrischen Potential

$$L = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) - V(r). \quad (632)$$

In diesem Fall ist φ eine zyklische Koordinate, der zugehörige kanonische Impuls lautet

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}. \quad (633)$$

Damit lautet die Routhsche Funktion

$$\begin{aligned} R &= p_\varphi \dot{\varphi} - \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) + V(r) \\ &= \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} - \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + V(r) \\ &= R(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}). \end{aligned} \quad (634)$$

R ist unabhängig von φ und p_φ ist eine Konstante.

20.3 Kanonische Transformationen

Betrachtet man eine Masse im dreidimensionalen Raum in einem radialsymmetrischen Potential in kartesischen Koordinaten, dann gibt es keine zyklische Koordinate. Man hat ein Problem mit 3 unabhängigen Koordinaten und 3 unabhängigen Geschwindigkeiten oder Impulsen.

Wechselt man nun von kartesischen Koordinaten zu Kugelkoordinaten, dann wird φ eine zyklische Koordinate und im Hamilton oder Routh-Formalismus gibt es 2 unabhängigen Koordinaten und 2 unabhängige Impulsen.

Wir untersuchen nun die Frage, inwieweit man durch Transformationen der Koordinaten die neuen Koordinaten zyklisch machen kann. Weiter verallgemeinern wir die Koordinatentransformationen $q \rightarrow Q = Q(q)$ zu Transformationen die sowohl von den Koordinaten, als auch von den Impulsen abhängen können.

Definition: Kanonische Transformationen sind diffeomorphe Transformationen der Variablen q, p und der Hamilton-Funktion $H(q, p, t)$

$$\begin{aligned}(q, p) &\rightarrow (Q, P), \\ H(q, p, t) &\rightarrow \tilde{H}(Q, P, t),\end{aligned}\tag{635}$$

so dass die Struktur der kanonischen Gleichungen erhalten bleibt, d.h.

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i} \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i}.\tag{636}$$

Beachte:

- Nun sind die neuen Koordinaten Funktionen von den Koordinaten und den Impulsen $q \rightarrow Q = Q(q, p)$ und dasselbe gilt für die Impulse $p \rightarrow P = P(q, p)$.
- Dies ist eine Verallgemeinerung der Koordinatentransformation $q \rightarrow Q = Q(q)$, wie in früheren Vorlesungen!
- Koordinatentransformationen sind ein Sonderfall der kanonischen Transformationen.

Damit die Struktur der kanonischen Gleichungen erhalten bleibt, muss das Variationsprinzip für die Hamilton-Funktion sowohl für das System q, p, H , als auch für das System Q, P, \tilde{H} gelten:

$$\begin{aligned}\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{k=1}^f p_k \dot{q}_k - H(q, p, t) \right) dt &= 0, \\ \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{k=1}^f P_k \dot{Q}_k - \tilde{H}(Q, P, t) \right) dt &= 0.\end{aligned}\tag{637}$$

Die ist sicherlich erfüllt, wenn sich die beiden Lagrange-Funktionen nur um

ein totales Zeitdifferential dM/dt unterscheiden:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^f p_k \dot{q}_k - H(q, p, t) + \frac{dM_1(q, t)}{dt} &= \sum_{k=1}^f P_k \dot{Q}_k - \tilde{H}(Q, P, t) + \frac{dM_2(Q, t)}{dt} \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^f p_k \dot{q}_k - H(q, p, t) &= \sum_{k=1}^f P_k \dot{Q}_k - \tilde{H}(Q, P, t) + \frac{dM(q, Q, t)}{dt}. \end{aligned} \quad (638)$$

Es gibt nun vier Möglichkeiten kanonische Transformationen zu erzeugen - diese sind durch Legendre-Transformation miteinander verbunden.

1. Der offensichtliche Fall: M hängt von den neuen und alten Koordinaten ab: $M = M_1(q, Q, t)$.

In diesem Fall gilt

$$\frac{dM_1}{dt} = \frac{\partial M_1}{\partial t} + \sum_{k=1}^f \left[\frac{\partial M_1}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial M_1}{\partial Q_k} \dot{Q}_k \right]. \quad (639)$$

Gleichung (638) kann auch wie folgt geschrieben werden

$$L(q, p, t) = \tilde{L}(Q, P, t) + \frac{\partial M_1}{\partial t} + \sum_{k=1}^f \left[\frac{\partial M_1}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial M_1}{\partial Q_k} \dot{Q}_k \right]. \quad (640)$$

Nun wenden wir die partielle Ableitung nach \dot{q}_i auf die linke und rechte Seite dieser Gleichung an und erhalten

$$p_i = \frac{\partial M_1}{\partial q_i}. \quad (641)$$

Wenden wir die partielle Ableitung nach \dot{Q}_i auf die linke und rechte Seite an so erhalten wir

$$0 = P_i + \frac{\partial M_1}{\partial Q_i}. \quad (642)$$

Damit lautet Gleichung (638)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^f p_k \dot{q}_k - H(q, p, t) &= \sum_{k=1}^f P_k \dot{Q}_k - \tilde{H}(Q, P, t) + \frac{\partial M_1}{\partial t} + \sum_{k=1}^f \left[p_k \dot{q}_k - P_k \dot{Q}_k \right] \\ \Rightarrow \tilde{H}(Q, P, t) &= H(q, p, t) + \frac{\partial M_1}{\partial t}. \end{aligned} \quad (643)$$

Man nennt $M_1 = M_1(q, Q, t)$ die Erzeugende der kanonischen Transformation.

Beispiel KT1: Harmonischer Oszillator in 1 Dimension.

Wir starten mit der Hamilton-Funktion

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2. \quad (644)$$

Vom Himmel sei nun die kanonische Transformation $M_1(q, Q, t)$ gefallen:

$$M_1(q, Q, t) = \frac{m}{2}\omega q^2 \cot Q. \quad (645)$$

Aus unseren Konsistenzgleichungen erhalten wir

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial M_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q, \\ P &= -\frac{\partial M_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2 \sin^2 Q}, \\ 0 &= \frac{\partial M_1}{\partial t} \end{aligned} \quad (646)$$

Nun müssen wir (q, p) nach (Q, P) auflösen.

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q, \\ p &= \sqrt{2Pm\omega} \cos Q. \end{aligned} \quad (647)$$

Damit wird der Hamilton zu

$$\begin{aligned} H &= \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2, \\ \tilde{H} &= \frac{2Pm\omega \cos^2 Q}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 \frac{2P}{m\omega} \sin^2 Q = P\omega. \end{aligned} \quad (648)$$

Nun ist die einzige Koordinate zyklisch und die Hamilton-Funktion hängt nur vom zeitlich konstanten Impuls $P = \alpha$ ab.

Die kanonischen Gleichungen lauten nun in den neuen Koordinaten

$$\begin{aligned} \dot{P} &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = \alpha, \\ \dot{Q} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = \omega \Rightarrow Q = \omega t + \beta. \end{aligned} \quad (649)$$

Rücktransformiert in die ursprünglichen Koordinaten lautet das

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega}} \sin(\omega t + \beta), \quad (650)$$

was der bekannten Lösung des harmonischen Oszilators entspricht.

21 Kanonische Transformationen II und Hamilton-Jacobi-Theorie

21. Vorlesung: Dienstag 17.1.2023 — [Scheck 2.31...2.34](#)

21.1 Kanonische Transformationen

Definition: Kanonische Transformationen sind diffeomorphe Transformationen der Variablen q, p und der Hamilton-Funktion $H(q, p, t)$

$$\begin{aligned}(q, p) &\rightarrow (Q, P), \\ H(q, p, t) &\rightarrow \tilde{H}(Q, P, t),\end{aligned}\tag{651}$$

so dass die Struktur der kanonischen Gleichungen erhalten bleibt, d.h.

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i} \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i}.\tag{652}$$

1. $M = M_1(q, Q, t)$

$$\begin{aligned}p_i &= -\frac{\partial M_1}{\partial q_i}, \\ P_i &= -\frac{\partial M_1}{\partial Q_i}, \\ \tilde{H}(Q, P, t) &= H(q, p, t) + \frac{\partial M_1}{\partial t}.\end{aligned}\tag{653}$$

Beispiel KT2: Vertauschen von Ort und Impuls

Diese Klasse von Transformationen enthält auch die Vertauschung von Ort und Impuls

$$M_1(q, Q, t) = \sum_{k=1}^f q_k Q_k.\tag{654}$$

Damit folgt aus obigen Konsistenzgleichungen

$$\begin{aligned}p_i &= \frac{\partial M_1}{\partial q_i} = Q_i, \\ P_i &= -\frac{\partial M_1}{\partial Q_i} = -q_i, \\ \tilde{H} &= H.\end{aligned}\tag{655}$$

2. Als nächstes führen wir in M eine Legendre-Transformation bzgl. Q durch und wir werden dann eine Erzeugende erhalten die von den alten Koordinaten q und den neuen Impulsen P abhängt: $M = M_2(q, P, t)$. Definiere Legendre-Transformation durch Differentiale

$$f(x, y) \rightarrow g\left(u = \frac{\partial f}{\partial x}, y\right). \quad (656)$$

Das totale Differential von $f(x, y)$ lautet

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \\ &=: u dx + v dy. \end{aligned} \quad (657)$$

Die Funktion g (Legendre-Transformierte von f) ist definiert als

$$g := f - ux. \quad (658)$$

Damit lautet das totale Differential von g

$$dg = df - u dx - x du =: v dy - x du. \quad (659)$$

Damit ist g nun eine Funktion von y und u , $g = g(u, y)$ mit

$$v = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad x = -\frac{\partial g}{\partial u}. \quad (660)$$

Auf Lagrange- und Hamilton-Funktion angewendet ergibt das:

$$\begin{aligned} L &= L(q, \dot{q}), \\ dL &= \frac{\partial L}{\partial q} dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} = \dot{p} dq + p d\dot{q}, \\ H &= p\dot{q} - L, \\ dH &= p d\dot{q} + \dot{q} dp - dL = \dot{q} dp - \dot{p} dq. \end{aligned} \quad (661)$$

Wir Legendre-Transformieren nun die Erzeugende M_1

$$M_2\left(q, P = -\frac{\partial M_1}{\partial Q}, t\right) = M_1(q, Q, t) + PQ. \quad (662)$$

Damit erhalten wir

$$\frac{dM_1}{dt} = \frac{\partial M_2}{\partial t} + \sum_{k=1}^f \left[\frac{\partial M_2}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial M_2}{\partial P_k} \dot{P}_k \right] - \sum_{k=1}^f \left[P_k \dot{Q}_k + O_k \dot{P}_k \right]. \quad (663)$$

Setzen wir dies in Gleichung (638) ein, so ergibt dies

$$\sum_{k=1}^f p_k \dot{q}_k - H = - \sum_{k=1}^f O_k \dot{P}_k - \tilde{H} + \frac{\partial M_2}{\partial t} + \sum_{k=1}^f \left[\frac{\partial M_2}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial M_2}{\partial P_k} \dot{P}_k \right]. \quad (664)$$

Nun wenden wir die partielle Ableitung nach \dot{q}_i auf die linke und rechte Seite dieser Gleichung an und bekommen

$$p_i = \frac{\partial M_2}{\partial q_i}. \quad (665)$$

Wenden wir die partielle Ableitung nach \dot{P}_i auf die linke und rechte Seite an, so erhalten wir

$$0 = -Q_i + \frac{\partial M_2}{\partial P_i}. \quad (666)$$

Mit diesen beiden Ergebnissen finden wir weiter

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial M_2}{\partial t}. \quad (667)$$

Beispiel KT3: Diese Klasse von Erzeugenden enthält die Einheitsabbildung:

$$M_2(q, P, t) = \sum_{k=1}^f q_k P_k. \quad (668)$$

Damit folgt aus obigen Konsistenzgleichungen

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial M_2}{\partial q_i} = P_i, \\ Q_i &= \frac{\partial M_2}{\partial P_i} = q_i, \\ \tilde{H} &= H. \end{aligned} \quad (669)$$

3. $M = M_3(p, Q, t)$:

$$\begin{aligned} q_i &= -\frac{\partial M_3}{\partial p_i}, \\ P_i &= -\frac{\partial M_3}{\partial Q_i}, \\ \tilde{H} &= H + \frac{\partial M_3}{\partial t}. \end{aligned} \quad (670)$$

4. $M = M_4(p, P, t)$:

$$\begin{aligned} q_i &= -\frac{\partial M_4}{\partial p_i}, \\ Q_i &= \frac{\partial M_4}{\partial P_i}, \\ \tilde{H} &= H + \frac{\partial M_4}{\partial t}. \end{aligned} \quad (671)$$

Wir kennen nun die allgemeinste Struktur von Transformationen der Koordinaten und Impulse, die die kanonischen Gleichungen invariant lassen.

21.2 Hamilton-Jacobi-Theorie

Bisher haben wir versucht Transformationen zu finden, die zu möglichst vielen zyklischen Koordinaten und somit erhaltenen Impulsen führen.

Nun gehen wir noch einen Schritt weiter und versuchen Transformationen zu finden, die auf konstante Impulse $P_i = p_{i0}$ und auf konstante Koordinaten $Q_i = q_{i0}$ führen.

Finden wie diese, dann sind die Lösungen in den ursprünglichen Koordinaten gegeben durch

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(q_{i0}, p_{i0}, t), \\ p_i &= p_i(q_{i0}, p_{i0}, t). \end{aligned} \quad (672)$$

Für die transformierten Koordinaten gelten die kanonischen Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{P}_i &= 0 = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i}, \\ \dot{Q}_i &= 0 = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i}. \end{aligned} \quad (673)$$

Diese Bedingungen werden sicherlich durch eine verschwindene Hamilton-Funktion $\tilde{H} = 0$ erfüllt.

Wir suchen nun nach einer kanonischen Transformation $M = M_2(q, P, t)$ die wir nun Hamiltonsche Wirkungsfunktion $S(q, P, t)$ nennen: nach obigem gilt

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial S}{\partial q_i}, \\ Q_i &= \frac{\partial S}{\partial P_i}, \\ \tilde{H}(Q_i, P_i) = 0 &= H(q_i, p_i) + \frac{\partial S}{\partial t} \\ 0 &= H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial S(q_i, P_i = \beta_i, t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (674)$$

Die letzte Gleichung wird als **Hamilton-Jacobische Differentialgleichung** bezeichnet.

Die ist eine nichtlineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung, die von $n + 1$ Variablen q_i, t abhängt. Um die Lösung zu erhalten müssen wir $n + 1$ -mal integrieren und erhalten dabei $n + 1$ Integrationskonstanten.

Da S nur als Ableitung in der Hamilton-Jacobi-Gleichung erscheint, ist S nur bis auf eine additive Konstante a genau bestimmt, $S' = S + a$. Eine der $n + 1$ Integrationskonstanten ist a , und muss nicht berücksichtigt werden.

Wir erhalten also als Lösung

$$S = S(q_1, \dots, q_f, \beta_1, \dots, \beta_f, t), \quad (675)$$

mit den Integrationskonstanten β_i .

Es gilt also

$$\begin{aligned} P_i &= \beta_i, \\ Q_i &= \frac{\partial S}{\partial P_i} = \frac{\partial S(q_1, \dots, q_f, \beta_1, \dots, \beta_f, t)}{\partial \beta_i} = \alpha_i. \end{aligned} \quad (676)$$

Wir erhalten die ursprünglichen Koordinaten q_i und p_i via

$$\begin{aligned} \alpha_i = \frac{\partial S}{\partial \beta_i} &\Rightarrow q_i = q_i(\alpha_i, \beta_i, t), \\ p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} &\Rightarrow p_i = p_i(q_i, \beta_i, t) = q_i(\alpha_i, \beta_i, t). \end{aligned} \quad (677)$$

21.3 Bedeutung der Erzeugenden

Wenn H keine explizite Zeitabhängigkeit hat, dann ist H gleich der Gesamtenergie des Systems, d.h.

$$E = H = -\frac{\partial S}{\partial t}. \quad (678)$$

Das heisst die Erzeugende S hat folgende Form

$$S(q_i, P_i, t) = S_0(q_i, P_i) - Et. \quad (679)$$

Für die totale Ableitung von S nach der Zeit, erhalten wir daher

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \sum_i \left[\frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial P_i} \dot{P}_i \right] + \frac{\partial S}{\partial t} \\ &= \sum_i \left[p_i \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial P_i} 0 \right] - H \\ &= \sum_i p_i \dot{q}_i - H = L. \end{aligned} \quad (680)$$

Damit ist die Erzeugende S ,

$$S = \int L dt + \text{const.} \quad (681)$$

gleich der Wirkung!

21.4 Beispiel zur Hamilton-Jacobi-Theorie

Die Hamilton-Funktion für den harmonischen Oszillator lautet

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} q^2. \quad (682)$$

Für die Hamiltonsche Wirkungsfunktion gilt

$$\begin{aligned} S &= S(q, P, t), \\ p &= \frac{\partial S}{\partial q}. \end{aligned} \quad (683)$$

Damit lautet die Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q_i} \right)^2 + \frac{k}{2} q^2 = 0. \quad (684)$$

Ein Produktansatz für die Lösung funktioniert nicht wegen der Nichtlinearität, daher benutzen wir einen Summenansatz

$$S = S_1(t) + S_2(q). \quad (685)$$

Daraus folgt für die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{dS_1}{dt}, \quad \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{dS_2}{dq} \quad (686)$$

und somit lautet die Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{S}_1(t) + \frac{1}{2m} \left(\frac{dS_2}{dq} \right)^2 + \frac{k}{2} q^2 &= 0, \\ -\dot{S}_1(t) &= \frac{1}{2m} \left(\frac{dS_2}{dq} \right)^2 + \frac{k}{2} q^2 = \beta. \end{aligned} \quad (687)$$

Für die Zeitabhängigkeit erhält man sofort

$$S_1(t) = -\beta t, \quad (688)$$

während für den ortsabhängigen Teil gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left(\frac{dS_2}{dq} \right)^2 + \frac{k}{2} q^2 &= \beta \\ \frac{dS_2}{dq} &= \sqrt{2m\beta - mkq^2} \\ S_2(q) &= \sqrt{mk} \int \sqrt{2\frac{\beta}{k} - q^2} dq. \end{aligned} \quad (689)$$

Somit lautet die erzeugende Funktion (Hamiltonsche Wirkungsfunktion) - es gibt drei freie Parameter: q , t und β und daher identifizieren wir β mit P :

$$S(q, \beta, t) = \sqrt{mk} \int \sqrt{2\frac{\beta}{k} - q^2} dq - \beta t. \quad (690)$$

Es gilt nun weiter

$$Q = \frac{\partial S}{\partial \beta} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{1}{\sqrt{2\frac{\beta}{k} - q^2}} dq - t. \quad (691)$$

Dieses Integral liefert wegen

$$\frac{d \arcsin q}{dq} = \frac{1}{\sqrt{1 - q^2}} \quad (692)$$

den Arcsin und damit

$$Q + t = \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{k}{2\beta}} q \right). \quad (693)$$

Mit der üblichen Abkürzung $\omega^2 = k/m$ ergibt sich aufgelöst nach den ursprünglichen Koordinaten

$$\sqrt{\frac{2\beta}{k}} \sin [\omega(Q + t)] = q. \quad (694)$$

Ein Vergleich mit der bekannten Lösung des harmonischen Oszillators ergibt somit $\beta = E$ und $Q = t_0$, d.h. Energie und Zeit sind nun kanonisch konjugierte Variablen.

22 Liouville-Theorem

22. Vorlesung: Freitag 20.1.2023 — [Scheck 2.29...2.30](#)

22.1 Struktur der kanonischen Gleichungen

Ist $f = 1$, so können die kanonischen Gleichungen wie folgt geschrieben werden

$$\dot{\underline{x}} = \hat{J}\hat{H}_{,x}, \quad (695)$$

mit

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, \quad \hat{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{H}_{,x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix}. \quad (696)$$

Für die Matrix \hat{J} gilt:

$$\hat{J}^2 = -\mathbb{1}, \quad \hat{J}^T = \hat{J}^{-1} = -\hat{J}. \quad (697)$$

Die Lösungen der kanonischen Gleichungen haben die Form

$$\underline{x}(t, s, \underline{y}) = \vec{\Phi}_{t,s}(\underline{y}), \quad (698)$$

mit der Anfangszeit s und den Anfangskoordinaten y , sowie $\vec{\Phi}_{s,s}(\underline{y}) = \underline{y}$. Dies kann trivial auf $f > 1$ verallgemeinert werden, wobei

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} 0_{f \times f} & \mathbb{1}_{f \times f} \\ -\mathbb{1}_{f \times f} & 0_{f \times f} \end{pmatrix}. \quad (699)$$

22.2 Lineares System in einer Dimension

Für ein lineares System gilt

$$\dot{\underline{x}} = \hat{A}\underline{x}, \quad (700)$$

mit einer 2×2 Matrix \hat{A} .

Unter Zuhilfenahme der kanonischen Gleichungen, erhalten wir

$$-\hat{J}\dot{\underline{x}} = -\hat{J}\hat{A}\underline{x} = \hat{H}_{,x}. \quad (701)$$

Daher lautet die allgemeinst mögliche Form des Hamiltonian

$$H = ap^2 + bpq + cq^2. \quad (702)$$

(Für den klassischen harmonischen Oszillator gilt: $a = c = 1$ und $b = 0$).

Damit folgt

$$\hat{A}\vec{x} = -\hat{J}\hat{H}_{,x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ap + bq \\ -bp - 2cq \end{pmatrix}, \quad (703)$$

und somit

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} b & 2a \\ -2c & -b \end{pmatrix}. \quad (704)$$

Die Lösung von Gleichung (702) ergibt eine Exponentialfunktion

$$\vec{x}(t) = \exp[\hat{A}(t-s)]\vec{y}. \quad (705)$$

Wir betrachten die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion

$$\exp[\hat{A}t] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\hat{A}t)^n}{n!}. \quad (706)$$

Multiplizieren wir \hat{A} mit sich selbst so ergibt sich

$$\hat{A}^2 = \begin{pmatrix} b & 2a \\ -2c & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 2a \\ -2c & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2 - 4ac & 0 \\ 0 & b^2 - 4ac \end{pmatrix} = -\Delta \mathbb{1} \quad (707)$$

und allgemein

$$\begin{aligned} \hat{A}^{2n} &= (-1)^n \Delta^n \mathbb{1} = (-1)^n \sqrt{\Delta}^{2n} \mathbb{1}, \\ \hat{A}^{2n+1} &= (-1)^n \Delta^n \hat{A} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} (-1)^n \sqrt{\Delta}^{2n+1} \hat{A}, \end{aligned} \quad (708)$$

wobei Δ die Determinante der Matrix \hat{A} ist.

Es gilt also

$$\exp[\hat{A}t] = \mathbb{1} \cos(\sqrt{\Delta}t) + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \hat{A} \sin(\sqrt{\Delta}t). \quad (709)$$

Mit $\omega \equiv \sqrt{\Delta}$, $C \equiv \cos[\omega(t - s)]$ und $S \equiv \sin[\omega(t - s)]$ lautet die Lösung

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= \vec{\Phi}_{t,s}(\vec{y}) \equiv \mathbf{P}(t - s) \cdot \vec{y} \\ &= \begin{pmatrix} C + \frac{b}{\omega}S & \frac{2a}{\omega}S \\ -\frac{2c}{\omega}S & C - \frac{b}{\omega}S \end{pmatrix} \cdot \vec{y}.\end{aligned}\quad (710)$$

Dies beschreibt harmonische Oszillationen (bzw. exponentiellen Anstieg, wenn $\Delta < 0$).

Die Lösung ist also eine lineare Funktion von den Anfangsbedingungen

$$x^i = \sum_{k=1}^2 P_{ik}(t - s)y^k, \Rightarrow dx^i = \sum_{k=1}^2 P_{ik}(t - s)dy^k. \quad (711)$$

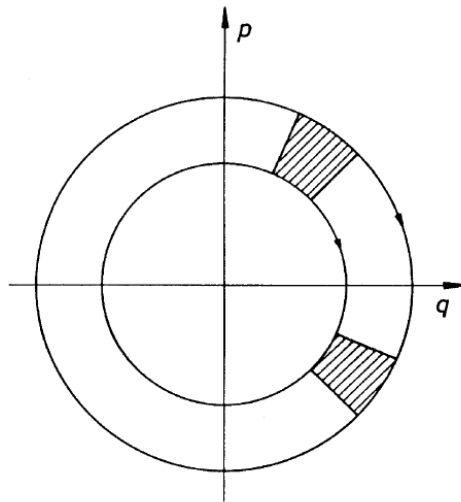
Das Phasenraumvolumenelement ist invariant, wenn gilt

$$\det \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right) = \det P_{ik}(t - s) = 1. \quad (712)$$

Dies ist in der Tat der Fall

$$\det P_{ik}(t - s) = C^2 - \frac{b^2}{\omega^2}S^2 + \frac{4ac}{\omega^2}S^2 = 1. \quad (713)$$

Für den klassischen harmonischen Oszillator sieht das Phasenraumbild wie folgt aus



Für den harmonischen Oszillator ändert ein Volumenelement also nicht seine Größe während der Zeitentwicklung des Systems.

22.3 Liouville-Theorem

Wir untersuchen nun den **Fluss** einer beliebigen Bewegung im Phasenraum.

Bisher haben wir einzelne Phasenraumkurven betrachtet.

22.3.1 Wiederholung:

- Jeder Punkt im Phasenraum bewegt sich gemäß

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (714)$$

- Phasenraumkurven werden bestimmt durch

$$H(p, q) = E = \text{const.} \quad (715)$$

- Gibt es f Freiheitsgrade, dann bestimmt diese Gleichung eine $2f - 1$ dimensionale Oberfläche.
- Phasenraumkurven können sich nicht schneiden!
- Verschiedene Kurven/Oberflächen entsprechen verschiedenen Energien.
- Diese Oberflächen füllen den ganzen Phasenraum aus und ein Phasenraumpunkt bleibt immer auf der Oberfläche auf der er begonnen hat (Energieerhaltung).

Nun betrachten wir eine Menge von Phasenraumtrajektorien, die sehr eng beieinander liegen - fiktive Phasenraumflüssigkeit.

22.3.2 Fluß und Divergenz

Der **Fluss** einer Flüssigkeit im 3-dimensionalen Raum wird beschrieben durch ein Geschwindigkeitsfeld

$$\vec{v}(x, y, z, t). \quad (716)$$

Ein **stationärer Fluss** hängt nicht explizit von der Zeit ab

$$\vec{v}(x, y, z). \quad (717)$$

Weiter nehmen wir an, dass die Flüssigkeit **inkompressibel** ist, wie dies z.B. bei Wasser der Fall ist. In diesem Fall belegt eine gegebene Menge an Flüssigkeit immer dasselbe Volumen.

Wir betrachten das Volumenelement

$$\begin{aligned}x_0 < x < x_0 + dx, \\y_0 < y < y_0 + dy, \\z_0 < z < z_0 + dz.\end{aligned}\tag{718}$$

Inkompressibilität bedeutet, dass die Anzahl der Flüssigkeitselemente (Atome,...) im Volumenelement $dV = dx dy dz$ konstant bleibt, d.h. der Einfluß muss gleich dem Ausfluß in das Volumenelement sein.

Die x -Komponente $v_x(x_0)$ des Geschwindigkeitsfeldes \vec{v} ist proportional zur Zahl der Flüssigkeitsteilchen pro Zeit und pro Fläche, die bei x_0 in das Volumenelement hineinfließen. Der Ausfluss bei $x_0 + dx$ ist proportional zu $v_x(x_0 + dx)$.

Damit ist der Nettofluss in x -Richtung pro Zeit pro Fläche $dx dy$ in das Volumenelement gleich

$$\begin{aligned}\frac{\text{Nettofluss in } x\text{-Richtung}}{t dy dz} &\propto \frac{v_x(x_0) - v_x(x_0 + dx)}{dx} dx = - \left. \frac{dv_x}{dx} \right|_{x_0} dx, \\ \frac{\text{Nettofluss in } x\text{-Richtung}}{t} &\propto - \left. \frac{\partial v_x}{\partial x} \right|_{x_0} dx dy dz.\end{aligned}\tag{719}$$

Der gesamte Fluss in das Volumenelement ist somit

$$\frac{\text{Nettofluss in } dV}{t} \propto - \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) (x_0, y_0, z_0) dV = -\vec{\nabla} \cdot \vec{v} dV\tag{720}$$

proportional zur **Divergenz** des Geschwindigkeitsfeldes.

Daher ist die Inkompressibilität einer Flüssigkeit (d.h. die Erhaltung des Volumens während des Flusses) gleichbedeutend mit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0.\tag{721}$$

22.3.3 Phasenraumfluss:

Wir stellen uns nun eine Phasenraumflüssigkeit vor. Das zugehörige Geschwindigkeitsfeld hängt von q_i und p_i ab. Die Komponenten des Geschwin-

digkeitsfeldes lauten $v_{q_i} = \dot{q}_i$ und $v_{p_i} = \dot{p}_i$ und gehorchen den Hamilton-Gleichungen

$$v_{q_i} = \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad v_{p_i} = \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (722)$$

Damit ergibt sich für die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \sum_i \left(\frac{\partial v_{q_i}}{\partial q_i} + \frac{\partial v_{p_i}}{\partial p_i} \right) \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right) = 0. \end{aligned} \quad (723)$$

Dies ist der Satz von Liouville: der Phasenraumfluss verhält sich wie eine inkompressible Flüssigkeit! Damit bleibt die Größe eines Volumenelements erhalten, die Form kann sich aber ändern.

Beispiele:

1. Harmonischer Oszillator - siehe oben.
2. $H = pq$. In diesem Falle gilt

$$\begin{aligned} \dot{q} &= q \Rightarrow q = q_0 e^t, \\ \dot{p} &= -p \Rightarrow p = p_0 e^{-t}. \end{aligned} \quad (724)$$

Kreisförmiges Element wird zur länglichen Ellipse in q Richtung.

23 Starrer Körper 1

23. Vorlesung: Dienstag 24.1.2023 — [Scheck 3.xx](#)

Statt wie bisher nur Massenpunkte, führen wir nun realistischere, ausgedehnte Massenverteilungen ein. Zunächst betrachten wir Rotationen um eine feste Drehachse isoliert. Später werden wir diese Betrachtung auf allgemeine Bewegungen verallgemeinern.

23.1 Schwerpunkt

Als starren Körper betrachten wir eine Ansammlung von n Massenpunkten m_α , deren relative Abstände sich nicht ändern. Diese Massenpunkte befinden sich am Ort \vec{r}_α (relativ zu einem gewählten Ursprung 0).

Die Gesamtmasse des Körpers lautet

$$M = \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha. \quad (725)$$

Im kontinuierlichen Fall wird daraus

$$M = \int dm = \int \rho dV = \rho_0 \int dV, \quad (726)$$

mit der Dichte ρ des Körpers, ist diese konstant $\rho = \rho_0$, so kann sie vor das Integral gezogen werden. dV ist das Volumenelement.

Die Koordinaten des Schwerpunktes des starren Körpers sind gegeben durch

$$\vec{R}_S = \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha \vec{r}_\alpha, \quad (727)$$

im kontinuierlichen Fall wird daraus

$$\vec{R}_S = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm. \quad (728)$$

Wird der Koordinatenursprung im Schwerpunkt gewählt so gilt

$$\vec{0} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha \vec{r}_\alpha. \quad (729)$$

Der **Gesamtimpuls** des starren Körpers lautet

$$\vec{P}_S = \sum_{\alpha=1}^n \vec{p}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha = \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha \vec{r}_\alpha = \frac{d}{dt} M \vec{R}_S = M \dot{\vec{R}}_S. \quad (730)$$

Der Gesamtimpuls des starren Körpers ist also gleich dem Gesamtimpuls einer Punktmasse, lokalisiert im Schwerpunkt \vec{R}_S mit der Masse M . Daher reicht oft die Behandlung von Punktkörpern aus.

Dies ändert sich aber bei der Eigenrotation von starren Körpern!

23.2 Drehimpuls

Der Ortsvektor \vec{r}_α (relativ zum Ursprung 0) des Massenelementes m_α kann auch relativ zum Schwerpunkt \vec{R}_S dargestellt werden.

$$\vec{r}_\alpha = \vec{R}_S + \vec{r}'_\alpha. \quad (731)$$

Für die gestrichelten Koordinaten gilt

$$\vec{0} = \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha \vec{r}'_\alpha. \quad (732)$$

Diese neuen Koordinaten können in einem raumfesten Koordinatensystem angegeben werden, oder es könnte sich auch um ein körperfestes Koordinatensystem (d.h. die Achsen bewegen sich mit dem starren Körper mit) handeln. Wir benutzen zunächst ein raumfestes Koordinatensystem.

Für den Gesamtdrehimpuls des starren Körpers relativ zum Ursprung 0 gilt dann

$$\vec{L} = \sum_{\alpha=1}^n \vec{l}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^n \vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \dot{\vec{r}}_\alpha. \quad (733)$$

Drücken wir die Koordinaten von \vec{r}_α durch \vec{r}'_α und den Schwerpunkt aus, so erhalten wir vier Terme

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{R}_S \times M \dot{\vec{R}}_S + \vec{R}_S \times \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha \dot{\vec{r}}'_\alpha + \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha \vec{r}'_\alpha \times \dot{\vec{R}}_S + \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha \vec{r}'_\alpha \times \dot{\vec{r}}'_\alpha \\ &= \vec{R}_S \times \vec{P}_S + \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha \vec{r}'_\alpha \times \dot{\vec{r}}'_\alpha = \vec{L}_{\text{Bahn}} + \vec{L}_{\text{Intrins.}} \end{aligned} \quad (734)$$

Der Drehimpuls des Körpers teilt sich also auf in einen Bahndrehimpuls $\vec{R}_S \times \dot{\vec{P}}_S$ des Schwerpunktes und einem intrinsischen Drehimpuls des starren Körpers relativ zu dessen Schwerpunkt.

Für die Zeitabhängigkeit des Bahndrehimpulses gilt

$$\dot{\vec{L}}_{Bahn} = \dot{\vec{R}}_S \times \vec{P}_S + \vec{R}_S \times \dot{\vec{P}}_S = \vec{0} + \vec{R}_S \times \vec{F}_{extern.}, \quad (735)$$

dies beschreibt die Bewegung eines Massenpunktes M am Ort \vec{R}_s .

Für die Zeitabhängigkeit des intrinsischen Drehimpulses gilt

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}}_{Intrins.} &= \dot{\vec{L}} - \dot{\vec{L}}_{Bahn} = \sum_{\alpha=1}^n \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{extern.} - \vec{R}_S \times \vec{F}_{extern.} \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \vec{r}'_\alpha \times \vec{F}_{extern.}, \end{aligned} \quad (736)$$

d.h. die zeitliche Änderung des intrinsischen Drehimpulses ist gleich dem Drehmoment bzgl. des Schwerpunktes.

23.3 Kinetische Energie

Die gesamte kinetische Energie des starren Körpers lautet

$$\begin{aligned} T &= \sum_{\alpha=1}^n \frac{m_\alpha}{2} \dot{r}_\alpha^2 = \sum_{\alpha=1}^n \frac{m_\alpha}{2} \dot{R}_S^2 + \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha \dot{R}_S \dot{r}'_\alpha + \sum_{\alpha=1}^n \frac{m_\alpha}{2} \dot{r}'_\alpha^2 \\ &= \frac{M}{2} \dot{R}_S^2 + \sum_{\alpha=1}^n \frac{m_\alpha}{2} \dot{r}'_\alpha^2. \end{aligned} \quad (737)$$

Die gesamte kinetische Energie ist also die Summe aus der kinetischen Energie des Schwerpunktes plus der kinetischen Energie der Relativbewegung.

23.4 Beispiel: Axtwurf

Schwerpunktsbewegung:



Ende des Axtstiels - Rotationsbewegung:

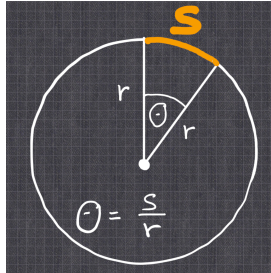


23.5 Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung

Bogenmaß: Winkel wird in Einheiten von **radians** gemessen:

$$\frac{\theta \text{ in Grad}}{360^\circ} = \frac{\theta \text{ in Radians}}{2\pi}. \quad (738)$$

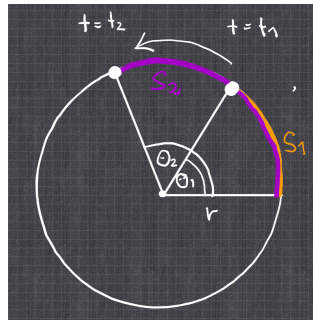
Dieser Winkel entspricht der Lange des Kreisbogens s normiert auf den Radius.



Bewegt sich ein Massenelement kreisförmig um die z -Achse (mit konstantem Abstand, da starrer Körper), dann ist die Winkelgeschwindigkeit definiert als

$$\omega_z = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \quad \Delta t \rightarrow 0 : \omega_z = \frac{d\theta}{dt}. \quad (739)$$

Die Einheit der Winkelgeschwindigkeit ist s^{-1} .



Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ ist entlang der Rotationsachse ausgerichtet und das Vorzeichen von $\vec{\omega}$ kann durch die rechte Handregel bestimmt werden.

Weiterhin kann eine **Winkelbeschleunigung** definiert werden:

$$\alpha_z = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \quad \Delta t \rightarrow 0 : \alpha_z = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}. \quad (740)$$

Der Vektor der Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha}$ ist parallel zu $\vec{\omega}$, wenn die Winkelgeschwindigkeit zunimmt und antiparallel, wenn sie abnimmt.

Für eine konstante Winkelbeschleunigung erhalten wir:

$$\alpha(t) = \text{const}, \quad (741)$$

$$\omega(t) = \alpha t + \omega(t_0). \quad (742)$$

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega(t_0)t + \theta_0. \quad (743)$$

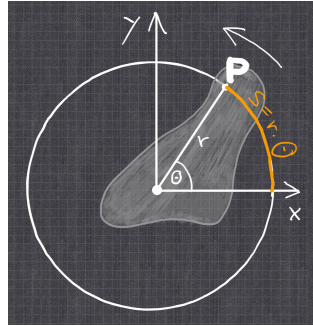
Eliminiert man die Zeit mit Hilfe der 2. Gleichung aus der letzten Gleichung, so erhält man

$$t = \frac{\omega(t) - \omega(t_0)}{\alpha}. \quad (744)$$

$$\omega(t)^2 = \omega(t_0)^2 + 2\alpha [\theta(t) - \theta_0]. \quad (745)$$

Die Winkelgeschwindigkeit kann mit der bekannten (linearen) Geschwindigkeit und Beschleunigung in Relation gesetzt werden. Betrachte einen Punkt P im Abstand r von der Rotationsachse, dann ergibt sich für die Bogenlänge s :

$$s = r\theta. \quad (746)$$



Der Punkt P bewegt sich also mit der Geschwindigkeit v

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} = r\omega. \quad (747)$$

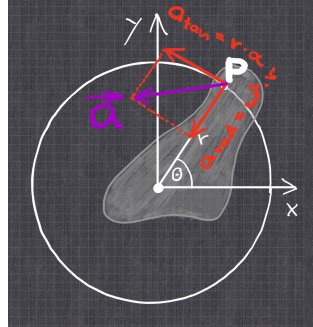
In Vektornotation gilt für die Bewegung auf einer Kreisbahn:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (748)$$

Die tangentielle und radiale Komponente der Beschleunigung sind wie folgt definiert:

$$a_{tan} \equiv \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\alpha, \quad a_{perp} \equiv \frac{v^2}{r} = \omega^2 r. \quad (749)$$

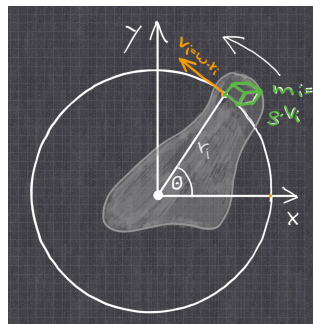
Aus diesen beiden Komponenten kann der lineare Beschleunigungsvektor \vec{a} konstruiert werden.



23.6 Rotationsenergie bei Drehung um feste Achse

Betrachte einen rotierenden Körper (Winkelgeschwindigkeit ω , Rotation um z -Achse) der aus verschiedenen Teilchen mit den Massen m_1, m_2, \dots im (starrren) Abstand r_1, r_2, \dots von der Rotationsachse besteht. Das α -te Teilchen hat dann eine kinetische Energie von

$$E_{kin,\alpha} = \frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{2}m_\alpha r_\alpha^2 \omega^2. \quad (750)$$



Die gesamte kinetische Energie des rotierenden Körpers lautet dann

$$E_{kin} = \sum_\alpha \frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_\alpha m_\alpha r_\alpha^2 = \frac{1}{2}I\omega^2, \quad (751)$$

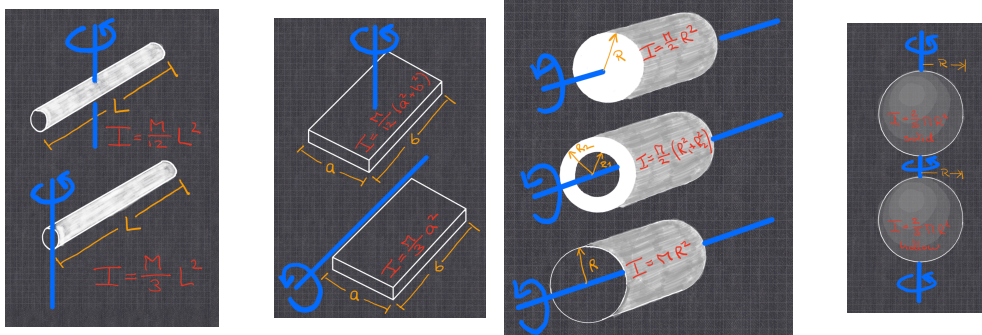
mit dem **Trägheitsmoment** I

$$I = \sum_\alpha m_\alpha r_\alpha^2. \quad (752)$$

Bemerkungen:

- $\omega \nearrow \Rightarrow E_{kin} \nearrow$; $[\omega] = \text{radians/second} \Rightarrow [E_{kin}] = \text{Joule}$.
- Die Größe von I hängt von der Masse, der Ausdehnung und der Geometrie des Körpers ab.

Trägheitsmomente verschiedener Körper



Dünner Stab Rechtwinklige, dünne Platte Zylinder Kugel

23.7 Drehimpuls bei Drehung um feste Achse

Der intrinsische Drehimpuls ist gegeben durch

$$\vec{L}_{Intrins.} = \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}' \times \dot{\vec{r}}_{\alpha}' \tag{753}$$

Bei einer Kreisbewegung gilt $\dot{r} = \omega r$ und damit

$$\vec{L}_{Intrins.} = \omega \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} r_{\alpha}'^2 = \omega I_{C.M.}, \tag{754}$$

mit dem Trägheitsmoment $I_{C.M.}$ bzgl. des Schwerpunktes.

23.8 Satz von Steiner

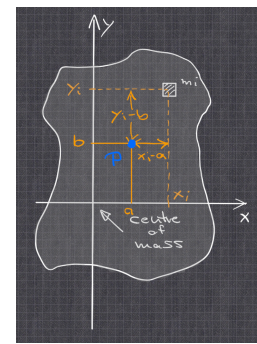
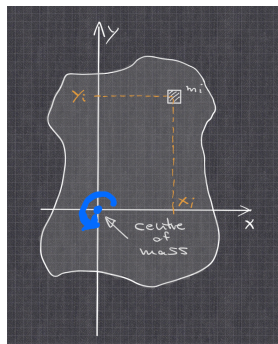
Rotiert ein Körper der Masse M um eine Achse, die durch den Punkt P (im Abstand R vom Schwerpunkt) geht, so lautet sein Trägheitsmoment I_P

$$I_P = I_{C.M.} + MR^2, \tag{755}$$

wobei $I_{C.M.}$ das Trägheitsmoment desselben Körper bezeichnet, wenn die Rotationachse durch den Schwerpunkt geht.

Beweis: $I_{C.M.}$ ist gegeben durch

$$I_{C.M.} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2). \quad (756)$$



Das Trägheitsmoment desselben Körpers um eine Achse durch den Punkt P ist gegeben durch

$$\begin{aligned} I_P &= \sum_i m_i [(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2] \\ &= \sum_i m_i [x_i^2 - 2x_i a + a^2 + y_i^2 - 2y_i b + b^2] \\ &= \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) - 2a \sum_i m_i x_i - 2b \sum_i m_i y_i + (a^2 + b^2) \sum_i m_i \\ &= I_{C.M.} + 0 + MR^2, \end{aligned} \quad (757)$$

mit der Masse $M = \sum_i m_i$ des Körpers und dem Abstand $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ des Punktes P vom Schwerpunkt. Beachte: der Schwerpunkt ist definiert als $x_{C.M.} = \sum_i m_i x_i / M$ (analog für $y_{C.M.}$) und wir sitzen in einem Koordinatensystem in dem der Schwerpunkt im Ursprung liegt, daher gilt $\sum_i m_i x_i = 0 = \sum_i m_i y_i$.

23.9 Berechnung von Trägheitsmomenten

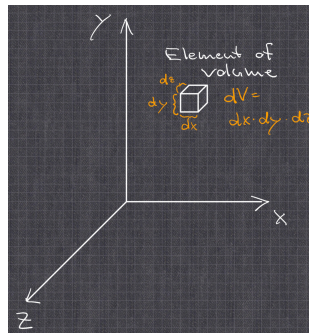
Wir haben das **Trägheitsmoment** I für diskrete Massenelemente definiert
- bei einer kontinuierlichen Massenverteilung wird daraus ein Integral

$$I = \sum_i r_i^2 m_i = \int r^2 dm = \rho \int \rho r^2 dV = \rho_0 \int r^2 dV, \quad (758)$$

wobei die letzte Gleichung nur gilt wenn die Dichte ρ_0 im ganzen Körper konstant ist.

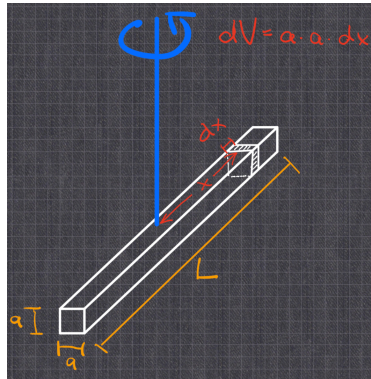
Wir wiederholen nun kurz drei Koordinatensysteme, um die Volumenintegration durchzuführen.

1. Kartesische Koordinaten:



$$dV = dx dy dz, \\ \text{Volumen} = \int_{x_i}^{x_f} dx \int_{y_i}^{y_f} dy \int_{z_i}^{z_f} dz. \quad (759)$$

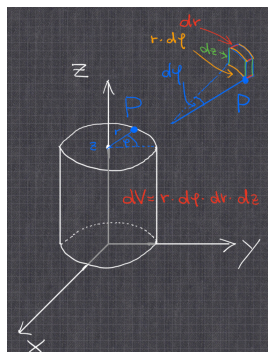
Beispiel: Trägheitsmoment eines dünnen Stabes, der um eine Achse durch den Schwerpunkt rotiert. Annahme: der Stab ist sehr dünn, i.e. $a \ll L$.



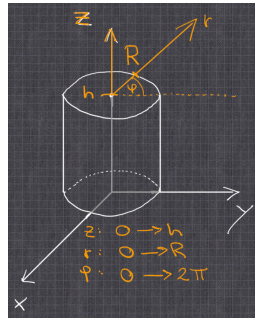
$$I = \rho \int r^2 dV = \rho \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} x^2 a^2 dx = \rho \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} a^2 = \rho a^2 L \frac{L^2}{12} = \frac{M}{12} L^2.$$

(760)

2. Zylinder Koordinaten:



$$\begin{aligned}
(x, y, z) &\rightarrow (r, \phi, z), \\
dV &= r d\phi \cdot dr \cdot dz, \\
V &= \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R r d\phi \cdot dr \cdot dz = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r dr \\
&= [z]_0^h [\phi]_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R = R^2 \pi h. \tag{761}
\end{aligned}$$



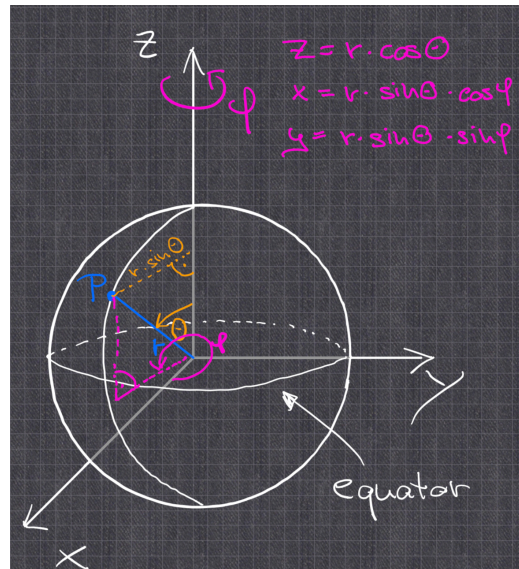
Beispiel: Trägheitsmoment eines Zylinders mit Radius R , Länge L und Masse M um seine Symmetrieachse.

$$\begin{aligned}
I &= \rho \int r^2 dV = \rho \int_0^L dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r^3 dr \\
&= \rho [z]_0^L [\phi]_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{1}{2} \cdot \rho R^2 \pi L \cdot R^2 = \frac{M}{2} R^2. \tag{762}
\end{aligned}$$

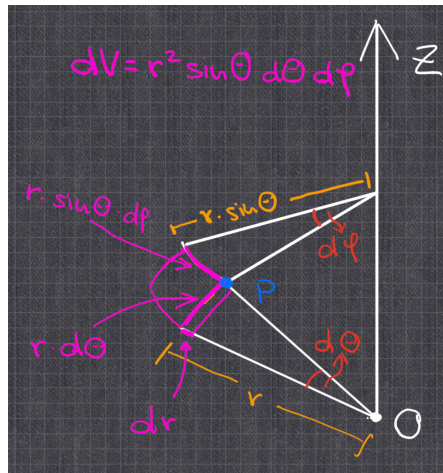
3. Kugelkoordinaten:

$$(x, y, z) \rightarrow (r, \phi, \theta). \tag{763}$$

r ist der Abstand vom Ursprung, ϕ der Drehwinkel um die z -Achse und θ der Winkel relativ zur z -Achse, mit dem Nordpol bei $\theta = 0$ (und dem Äquator bei $\theta = \pi/2$).



$$dV = r d\phi \cdot dr \cdot r \sin \theta d\theta. \quad (764)$$



Das Volumen einer Kugel mit Radius R lautet

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 dr d\phi \sin \theta d\theta = \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \\
 &= \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R [\phi]_0^{2\pi} [-\cos \theta]_0^\pi = \frac{R^3}{3} \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{4}{3} R^3 \pi. \quad (765)
 \end{aligned}$$

Warum wird θ nur bis π und nicht bis 2π integriert?

Beispiel: Trägheitsmoment einer Vollkugel mit Radius R um eine Achse, die durch die Mitte der Kugel verläuft.

Vorsicht mit unserer Definitionsformel!

$$I = \rho \int r^2 dV. \quad (766)$$

In dieser Formel ist r der Abstand von der Drehachse, und nicht der Abstand vom Ursprung. In Kugelkoordinaten lautet der Abstand von der Drehachse $r \sin \theta$.

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} I &= \rho \int r^2 \sin^2 \theta dV = \rho \int_0^R r^4 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \\ &= \rho \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^R [\phi]_0^{2\pi} \left[-\cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^\pi \\ &= \rho \frac{R^5}{5} \cdot 2\pi \cdot \left(2 + \frac{1}{3}(-2) \right) = \frac{2}{5} R^2 \cdot \frac{4}{3} R^3 \pi \rho = \frac{2}{5} MR^2. \quad (767) \end{aligned}$$

Trick: $\sin^3 \theta = \sin^2 \theta \cdot \sin \theta = (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta = \sin \theta - \cos^2 \theta \cdot \sin \theta$.
Die Ableitung von $\cos^3 \theta$ ist $3 \cos^2 \theta \cdot (-\sin \theta)$.

24 Starrer Körper 2

24. Vorlesung: Freitag 27.1.2023 —

Wir verallgemeinern nun unsere Überlegungen von der letzten Vorlesung in der wir ausschliesslich Rotationen um eine feste Achse behandelt haben und lassen nun auch allgemeine Bewegungen zu.

Bei einer Rotation um die z -Achse gilt

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{1}{2} I_z \omega_z^2, \\ L_z &= I_z \omega_z, \\ I_z &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2). \end{aligned} \tag{768}$$

24.1 Lineare Bewegung und Rotation

Zur Beschreibung eines starren Körpers führen wir nun zwei Koordinatensysteme ein:

1. Inertialsystem x_I, y_I, z_I : beschreibt die Bewegung des Schwerpunktes des Körpers.
2. Körperfestes Koordinatensystem x, y, z , da fest an den starren Körper angeheftet ist: beschreibt die Rotation des starren Körpers um seinen Schwerpunkt oder einen anderen Ursprung 0.

Euler-Theorem: jede beliebige Bewegung eines starren Körpers besteht aus einer

1. Translation, bei der sich die Winkellage des Körpers nicht ändert und alle Massenpunkte, dieselbe Geschwindigkeit haben.
2. Rotation um den beliebig wählbaren, körperfesten Koordinatenursprung

Beachte:

1. Die Translationsgeschwindigkeit hängt von der Wahl der Koordinatenursprungs ab.
2. Die Winkelgeschwindigkeit ist für alle Koordinatenursprünge bzw. für alle Punkte um die sich der Körper drehen soll, gleich groß.

3. Die momentane Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}(t)$ der Drehung ist parallel zur augenblicklichen Drehachse, die durch den Ursprung 0 geht. Im allgemeinen ändert die Drehachse seine Richtung, sowohl im Bezug auf das Inertialsystem, als auch auf das körperfeste System.

Freiheitsgrade:

- Ein starrer Körper hat 6 Freiheitsgrade: 3 Translation, 3 Drehungen (Richtung der Drehachse, Drehwinkel).
- Die Lage eines Körpers wird durch die Position von drei Körperfesten Punkten \vec{r}_1, \vec{r}_2 und \vec{r}_3 festgelegt, die nicht auf einer Geraden liegen. Für diese 3 Punkte gibt es drei Einschränkungen

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \text{const.}, |\vec{r}_1 - \vec{r}_3| = \text{const.}, |\vec{r}_2 - \vec{r}_3| = \text{const.} \quad (769)$$

Damit erhalten wir $9-3=6$ Freiheitsgrade.

Jede Bewegung setzt sich zusammen aus einer Translation des Ursprunges 0 und einer Drehung des körperfesten Koordinatensystems am 0.

⇒ **Die Geschwindigkeit eines körperfesten Punktes P im Inertialsystem** kann dargestellt werden als

$$\vec{v}_I = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (770)$$

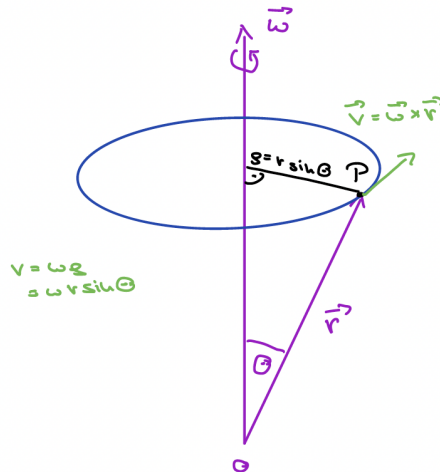
mit

- \vec{v}_0 : Geschwindigkeit des körperfesten Koordinatenursprunges im Inertialsystem.
- $\vec{\omega}$: Winkelgeschwindigkeit des starren Körpers im Inertialsystem. $\omega = |\vec{\omega}|$. Die Winkelgeschwindigkeit ist parallel zur Drehachse.
- $\vec{r} = 0\vec{P}$: Ortsvektor von P im körperfesten Koordinatensystem.

Ruht der Ursprung 0, i.e. $\vec{v}_0 = 0$, dann ergibt sich

$$\vec{v}_I = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (771)$$

Diese Relation kann wie folgt veranschaulicht werden:



bei einer Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um den Ursprung 0 erhalten wir für den Radiusvektor \vec{r} der vom Ursprung 0 zum Punkt P zeigt

$$v = \omega \rho = \omega r \sin \theta. \quad (772)$$

Das ist der Betrag vom Kreuzprodukt der Vektoren $\vec{\omega}$ und \vec{r} . Berücksichtigen wir noch die Richtung der Geschwindigkeit, so ergibt sich

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (773)$$

Dieser Zusammenhang gilt auch für mit dem Körper verbundene Vektoren, z.B. einen Einheitsvektor \vec{e}

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}. \quad (774)$$

24.2 Kinetische Energie - Trägheitstensor

Annahme: der Körper besteht aus n Massenpunkten mit den Ortsvektoren \vec{r}_α im körperfesten System.

Damit lautet die kinetische Energie des Körpers

$$\begin{aligned}
 T &= \sum_{\alpha=1}^n \frac{m_{\alpha}}{2} \vec{v}_I^2 = \sum_{\alpha=1}^n \frac{m_{\alpha}}{2} (\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha})^2 \\
 &= \sum_{\alpha=1}^n \frac{m_{\alpha}}{2} \vec{v}_0^2 + \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \vec{v}_0 \cdot \vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{m_{\alpha}}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha})^2 \\
 &= \frac{M}{2} \vec{v}_0^2 + \vec{v}_0 \times \vec{\omega} \cdot \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{m_{\alpha}}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha})^2 . \quad (775)
 \end{aligned}$$

Der erste Term ergibt die kinetische Energie des Schwerpunktes, der letzte Term gibt die intrinsische Rotationsenergie an und der Mittelterm ist eine Vermischung von Translation und Rotation. Deren Wert hängt davon ab, wo der Ursprung gewählt wird.

Meist benutzt man zwei Fälle:

1. Der starre Körper wird an keinem Punkt festgehalten und der Ursprung wird im Schwerpunkt gewählt, dann verschwindet der Mittelterm

$$T = \sum \frac{M}{2} \vec{v}_0^2 + \sum_{\alpha=1}^n \frac{m_{\alpha}}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha})^2 = T_{Trans} + T_{Rotation} . \quad (776)$$

Die gesamte kinetische Energie des starren Körpers ist gleich der kinetischen Translationsenergie des Schwerpunkts plus der Rotationsenergie um den Schwerpunkt.

2. Der Körper wird an einem Punkt festgehalten und wir wählen in diesem Punkt den Ursprung. Dann gilt $\vec{v}_0 = 0$. Damit erhalten wir für die gesamte kinetische Energie:

$$T = \sum_{\alpha=1}^n \frac{m_{\alpha}}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha})^2 = T_{Rotation} . \quad (777)$$

Die gesamte kinetische Energie ist gleich der Rotationsenergie um den festgehaltenen Punkt.

Um die Rotationsenergie weiter zu vereinfachen benutzen wir die Vektorendentität

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = a_i a_i b_j b_j - a_i b_i a_j b_j . \quad (778)$$

Damit lautet die Rotationsenergie

$$\begin{aligned}
T_{Rotation} &= \sum_{\alpha=1}^n \frac{m_{\alpha}}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha})^2 \\
&= \sum_{\alpha=1}^n \frac{m_{\alpha}}{2} (\omega_i \omega_i x_{\alpha,j} x_{\alpha,j} - \omega_i x_{\alpha,i} \omega_j x_{\alpha,j}) \\
&= \sum_{\alpha=1}^n \frac{m_{\alpha}}{2} \omega_i \omega_j (\delta_{ij} x_{\alpha,k} x_{\alpha,k} - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j}) \\
&= \frac{1}{2} \omega_i \omega_j \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} (\delta_{ij} x_{\alpha,k} x_{\alpha,k} - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j}) \\
&= \frac{1}{2} \omega_i \omega_j I_{ij}, \tag{779}
\end{aligned}$$

mit dem Trägheitstensor

$$I_{ij} = \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} (\delta_{ij} x_{\alpha,k} x_{\alpha,k} - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j}). \tag{780}$$

Bisher hatten wir ein Trägheitsmoment I für die Drehung um die z -Achse bestimmt, in diesem Falle ist $\vec{\omega} = (0, 0, \omega_z)$ und damit $T_{Rotation} = 1/2 \omega_z^2 I_{zz}$ mit $I_{zz} = \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} (x_{\alpha,1}^2 + x_{\alpha,2}^2 + x_{\alpha,3}^2 - x_{\alpha,3}^2)$, was mit der Definition des Trägheitsmomentes aus der letzten Vorlesung übereinstimmt.

Wir können den Trägheitstensor auch in Matrixschreibweise darstellen

$$\hat{I} = \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \begin{pmatrix} y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2 & -x_{\alpha} y_{\alpha} & -x_{\alpha} z_{\alpha} \\ -x_{\alpha} y_{\alpha} & x_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2 & -y_{\alpha} z_{\alpha} \\ -x_{\alpha} z_{\alpha} & -y_{\alpha} z_{\alpha} & x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2 \end{pmatrix}. \tag{781}$$

Die Diagonalelemente des Trägheitstensors heissen **Trägheitsmomente**, die Nebendiagonalelemente heissen **Deviationsmomente**.

Für kontinuierliche Massenverteilungen gilt

$$I_{ij} = \int \rho(x_1, x_2, x_3) ((x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \delta_{ij} - x_i x_j) dV. \tag{782}$$

Da der Trägheitstensor symmetrisch ist, $I_{ij} = I_{ji}$ kann er durch die Einführung eines neuen, gedrehten Koordinatensystems auf Diagonalform gebracht werden.

Die neuen Drehachsen heissen dann **Hauptträgheitsachsen**.
 Die Diagonalelemente $I_{ii} = I_i$ heissen dann **Hauptträgheitsmomente**.
 Für die Hauptträgheitsachsen lautet die kinetische Energie

$$T_{Rotation} = \frac{1}{2}(\omega_1^2 I_1 + \omega_2^2 I_2 + \omega_3^2 I_3). \quad (783)$$

Definitionen: ein starrer Körper heisst:

- **Rotator**, wenn er 1-dimensional ist und seine Massenpunkte nur auf einer Achse, z.B. der z -achse liegen, so dass $I_1 = I_2$ und $I_3 = 0$.
- **unsymmetrisch**, wenn alle Hauptträgheitsmomente verschieden sind.
- **symmetrisch**, wenn zwei Hauptträgheitsmomente gleich sind.
- **Kugelkreisel**, wenn $I_1 = I_2 = I_3$. Kugelkreisel sind nicht notwendigerweise Kugeln, sondern z.B. auch Würfel oder ein Zylinder mit der Höhe $h = \sqrt{3}r$.

24.3 Drehimpuls

Die Koordinaten und Geschwindigkeiten der Massenpunkte des starren Körpers lauten im Inertialsystem $\vec{r}_{I\alpha}$ und $\vec{v}_{I\alpha}$.

Damit erhalten wir für den Gesamtdrehimpuls

$$\vec{L}_{Tot.} = \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \vec{r}_{I\alpha} \times \vec{v}_{I\alpha}. \quad (784)$$

Nun wollen wir den Ortsvektor des körperfesten Koordinatenursprunges 0 , \vec{r}_0 and die Geschwindigkeit \vec{v}_0 des körperfesten Koordinatenursprunges separieren.

$$\begin{aligned} \vec{r}_{I\alpha} &= \vec{r}_0 + \vec{r}_{\alpha}, \\ \vec{v}_{I\alpha} &= \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}. \end{aligned} \quad (785)$$

Damit lautet der totale Drehimpuls

$$\vec{L}_{Tot.} = M\vec{r}_0 \times \vec{v}_0 + \vec{r}_0 \times \vec{\omega} \times \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{v}_0 + \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}. \quad (786)$$

Wir unterscheiden nun wieder zwei Fälle:

1. Der starre Körper wird an keinem Punkt festgehalten und wir legen den Ursprung in den Schwerpunkt. Dann gilt

$$\vec{L}_{Tot.} = M\vec{R}_S \times \vec{v}_S + \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}. \quad (787)$$

Der Gesamtdrehimpuls ist also die Summe aus Bahndrehimpuls des Schwerpunktes plus dem Eigendrehimpuls.

2. Der Körper wird an einem Punkt festgehalten und in diesem Punkt legen wir den Ursprung, d.h. $\vec{r}_0 = \vec{v}_0 = 0$. Damit erhalten wir

$$\vec{L}_{Tot.} = \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}. \quad (788)$$

Der Gesamtdrehimpuls ist gleich dem Eigendrehimpuls.

Um den Eigendrehimpuls weiter zu vereinfachen, benutzen wir die Vektoridentität

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (789)$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \vec{L}_{Rel.} &= \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} (\vec{\omega}(\vec{r}_{\alpha} \cdot \vec{r}_{\alpha}) - \vec{r}_{\alpha}(\vec{r}_{\alpha} \cdot \vec{\omega})) \\ L_i &= \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} (\omega_i(r_{\alpha,l}r_{\alpha,l}) - r_{\alpha,i}(r_{\alpha,k}\omega_k)) \\ &= \omega_k \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} (\delta_{ik}(r_{\alpha,l}r_{\alpha,l}) - r_{\alpha,i}r_{\alpha,k}) = \omega_k I_{ki}. \end{aligned} \quad (790)$$

Im Hauptträgheitsachsensystem gilt dann

$$L_1 = I_1\omega_1, \quad L_2 = I_2\omega_2, \quad L_3 = I_3\omega_3. \quad (791)$$

Das heisst im Allgemeinen ist der Drehimpuls nicht parallel zur Winkelgeschwindigkeit - dies ist der Grund für die mathematische Schwierigkeit der Untersuchung rotierender Systeme.

Bei Rotationen um eine Hauptträgheitsachse und bei Kugelkreiseln haben \vec{L} und $\vec{\omega}$ dieselbe Richtung.

25 Starrer Körper 3

25. Vorlesung: Donnerstag 2.2.2023 — [Scheck ...](#)

25.1 Schwerpunktsatz

Der Schwerpunkt ist in Inertialsystemskoordinaten gegeben durch

$$\vec{R}_S = \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \vec{r}_{I,\alpha}, \quad (792)$$

Für eine einzelne Punktmasse m_{α} gilt das Newtonsche Gesetz

$$m_{\alpha} \ddot{\vec{r}}_{I,\alpha} = \vec{F}_{\alpha} = \vec{F}_{\alpha}^{ext.} + \sum_{\beta=1}^n \vec{F}_{\beta}^{int.}, \quad (793)$$

wobei sich die gesamte auf m_{α} wirkende Kraft \vec{F}_{α} aufteilt auf eine äußere Kraft $\vec{F}_{\alpha}^{ext.}$, z.B. das Gravitationsfeld der Erde, sowie auf interne Kräfte, $\vec{F}_{\alpha\beta}^{int.}$ die von den anderen $n - 1$ Massenpunkten ausgehen, es gilt dabei $\vec{F}_{\alpha\alpha}^{int.} = 0$. Summiert man in Gleichung (793) über alle α -Werte, so erhält man

$$\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \ddot{\vec{r}}_{I,\alpha} = \sum_{\alpha=1}^n \vec{F}_{\alpha}^{ext.} + \sum_{\alpha,\beta=1}^n \vec{F}_{\alpha\beta}^{int.}. \quad (794)$$

Wegen dem dritten Newtonschen Axiom gilt $\vec{F}_{\alpha\beta}^{int.} = -\vec{F}_{\beta\alpha}^{int.}$, daher verschwindet der zweite Term auf der rechten Seite und wir erhalten

$$M \vec{R}_S = \sum_{\alpha=1}^n \vec{F}_{\alpha}^{ext.} \equiv \vec{F}^{ext.}. \quad (795)$$

Dies ist der Schwerpunktsatz: der Schwerpunkt bewegt sich so, als ob die gesamte Masse in ihm vereinigt wäre und als ob die Summe aller externen Kräfte auf ihn wirken.

Beachte: die inneren Kräfte sind für die Schwerpunktsbewegung irrelevant, ebenso die Angriffspunkte der externen Kräfte.

25.2 Drehimpulssatz

Wir gehen wieder von Gleichung (793) aus und multiplizieren vektoriell mit $\vec{r}_{I,\alpha}$ und summieren dann über α

$$\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \vec{r}_{I,\alpha} \times \ddot{\vec{r}}_{I,\alpha} = \sum_{\alpha=1}^n \vec{r}_{I,\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}^{ext.} + \sum_{\alpha,\beta=1}^n \vec{r}_{I,\alpha} \times \vec{F}_{\alpha\beta}^{int.} . \quad (796)$$

Die linke Seite der Gleichung ist die Zeitableitung des Gesamtdrehimpulses

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}}_{ges.} &= \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \vec{r}_{I,\alpha} \times \dot{\vec{r}}_{I,\alpha} = \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \left(\dot{\vec{r}}_{I,\alpha} \times \dot{\vec{r}}_{I,\alpha} + \vec{r}_{I,\alpha} \times \ddot{\vec{r}}_{I,\alpha} \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \vec{r}_{I,\alpha} \times \ddot{\vec{r}}_{I,\alpha} . \end{aligned} \quad (797)$$

Der erste Term auf der rechten Seite von Gleichung (796) ist das Gesamtdrehmoment, \vec{N} , der äußeren Kräfte.

Die Doppelsumme auf der rechten Seite von Gleichung (796) enthält Summanden wie

$$\vec{r}_{I,\alpha} \times \vec{F}_{\alpha\beta}^{int.} + \vec{r}_{I,\beta} \times \vec{F}_{\beta\alpha}^{int.} = (\vec{r}_{I,\alpha} - \vec{r}_{I,\beta}) \times \vec{F}_{\beta\alpha}^{int.} . \quad (798)$$

Die Kraft zwischen den Massenpunkten m_{α} und m_{β} muss parallel zur Verbindungslinie $(\vec{r}_{I,\alpha} - \vec{r}_{I,\beta})$ sein, damit verschwindet die Doppelsumme und wir erhalten den Drehimpulssatz

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}}_{ges.} &= \vec{N} , \\ \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \vec{r}_{I,\alpha} \times \ddot{\vec{r}}_{I,\alpha} &= \sum_{\alpha=1}^n \vec{r}_{I,\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}^{ext.} . \end{aligned} \quad (799)$$

25.3 Drehimpulssatz relativ zum Schwerpunkt

Wir betrachten nun die Zerlegung

$$\vec{r}_{I,\alpha} = \vec{R}_S + \vec{r}_{\alpha} , \quad (800)$$

wobei \vec{r}_{α} nicht körperfest ist, sondern relativ zum Inertialsystem, und nur zum Schwerpunkt verschoben ist.

Nun sind die \vec{r}_{α} Daraus folgt

$$\ddot{\vec{r}}_{I,\alpha} = \ddot{\vec{R}}_S + \ddot{\vec{r}}_{\alpha} . \quad (801)$$

Nun setzen wir diese Beziehungen in Gleichung (796) ein

$$\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha}(\vec{R}_S + \vec{r}_{\alpha}) \times (\ddot{\vec{R}}_S + \ddot{\vec{r}}_{\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^n (\vec{R}_S + \vec{r}_{\alpha}) \times \vec{F}_{\alpha}^{ext.} + \sum_{\alpha,\beta=1}^n (\vec{R}_S + \vec{r}_{\alpha}) \times \vec{F}_{\alpha\beta}^{int.} . \quad (802)$$

Die Doppelsumme verschwindet nach dem gleichen Argument wie oben. Unter Benutzung von

$$\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} = 0 \quad (803)$$

ergibt sich dann

$$\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha}(\vec{R}_S \times \ddot{\vec{R}}_S + \vec{r}_{\alpha} \times \ddot{\vec{r}}_{\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^n \vec{R}_S \times \vec{F}_{\alpha}^{ext.} + \sum_{\alpha=1}^n \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}^{ext.} . \quad (804)$$

Nach dem Schwerpunktsatz sind die jeweils ersten Termen auf der linken und rechten Seite gleich und es ergibt sich

$$\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \ddot{\vec{r}}_{\alpha} = \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \dot{\vec{r}}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^n \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}^{ext.} . \quad (805)$$

Die linke Seite ist die Zeitableitung des Gesamtdrehimpulses im Schwerpunktsystem, \vec{L}_S , die rechte Seite ist das Gesamtdrehmoment im Schwerpunktsystem \vec{N}_S und wir können schreiben

$$\dot{\vec{L}}_S = \vec{N}_S . \quad (806)$$

Dies ist der Drehimpulssatz im Schwerpunktsystem.

25.4 Die Eulerschen Gleichungen

Im letzten Kapitel haben wir ein Schwerpunktsystem betrachtet, das nicht mit dem Körper mit rotiert. In einem solchen System ist im allgemeinen der Trägheitstensor nicht konstant.

Betrachten wir nun ein körperfestes Schwerpunktsystem, dann gilt der Schwerpunktssatz weiterhin, aber man muss beachten, dass nun die Koordinatenachsen zeitabhängig sind.

Die Zeitableitung des Drehimpulses im körperfesten Schwerpunktsystem lautet

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}}_S &= \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \dot{\vec{r}}_\alpha, \\ \frac{d}{dt} (L_i \vec{e}_i) &= \frac{d}{dt} (I_{ij} \omega_j \vec{e}_i) = \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha = \vec{N}_S.\end{aligned}\quad (807)$$

Rotiert das körperfeste System im Inertialsystem mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ dann gilt

$$\dot{\vec{e}}_i = \vec{\omega} \times \vec{e}_i \quad (808)$$

und wir erhalten

$$\vec{N}_S = \dot{\vec{L}}_S = I_{ij} \dot{\omega}_j \vec{e}_i + I_{ij} \omega_j \vec{\omega} \times \vec{e}_i = \frac{d_k}{dt} \vec{L}_S + \vec{\omega} \times \vec{L}_S, \quad (809)$$

wobei d_k die körperfeste Ableitung bezeichnet.

Wenn die körperfesten Achsen Hauptträgheitsachsen sind, dann gilt $L_i = I_i \omega_i$ (keine Summenkonvention) und damit

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_2 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 \\ (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3 \\ (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (810)$$

Dies sind die Eulerschen Gleichungen.

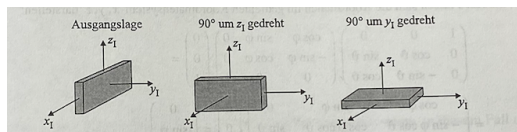
25.5 Eulerwinkel

Um beliebige Drehungen im dreidimensionalen Raum zu beschreiben führen wir die Eulerwinkel ein.

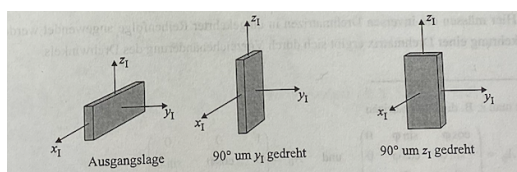
Beachte: Rotationen im dreidimensionalen Raum kommutieren im Allgemeinen nicht!

Betrachte einen Quader im Inertialsystem.

1. Drehe 90° um z_I -Achse, drehe dann 90° um y_I -Achse:

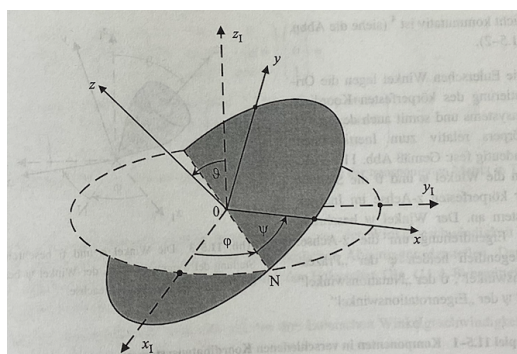


2. Drehe 90° um y_I -Achse, drehe dann 90° um z_I -Achse:



Der Übergang vom Inertialsystem auf ein beliebiges gedrehtes körperfestes System wird mit Hilfe der drei Eulerwinkel (ϕ , θ und ψ) beschrieben. Die Rotation muss dabei in folgender Reihenfolge durchgeführt werden. Wir starten im Koordinatensystem (x_I, y_I, z_I) mit dem Ursprung 0.

1. Drehung um den Winkel ϕ um die z_I Achse und wir erhalten das Koordinatensystem (x', y', z_I) . Die neue x' -Achse wird durch die Knotenlinie $0N$ gegeben.



2. Drehung um den Winkel θ um die x' Achse und wir erhalten das Koordinatensystem (x', y'', z) .
3. Drehung um den Winkel ψ um die z Achse und wir erhalten das körperfeste Koordinatensystem (x, y, z) .

In Drehmatrizen ausgedrückt lauten die drei Rotationen

$$\begin{pmatrix} x_I \\ y_I \\ z_I \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \hat{R}_z(\psi) \cdot \hat{R}_{x'}(\theta) \cdot \hat{R}_{z_I}(\phi) \begin{pmatrix} x_I \\ y_I \\ z_I \end{pmatrix}, \quad (811)$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{R}_z(\alpha) &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \hat{R}_x(\alpha) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (812)$$

Die Darstellung mit Matrizenmultiplikation erklärt auch die Definition der Eulerwinkel.

25.5.1 ChatGPD about Eulerwinkel

The Euler angles are a set of three angles used to describe the orientation of a rigid body (such as a 3D object) in space. They were first introduced by the mathematician Leonhard Euler in the 18th century and are named after him.

The Euler angles are typically represented by three angles, denoted as ϕ , θ , and ψ . These angles describe rotations about the x, y, and z axes, respectively. By combining these rotations in a specific order, the orientation of a rigid body can be described.

The Euler angles are used in many fields, such as robotics, aerospace, computer graphics, and physics, to describe the orientation of objects and their movements in 3D space. However, the choice of order in which the rotations are performed can lead to ambiguity, known as the *Euler angle singularities*. To avoid these ambiguities, other methods, such as rotation matrices or quaternions, are sometimes used in their place.

26 Starrer Körper 4

26. Vorlesung: Freitag 3.2.2023 — [Scheck ...](#)

26.1 Winkelgeschwindigkeit

Die Eulerschen Gleichungen lauten

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 \\ (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3 \\ (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 \end{pmatrix}. \quad (813)$$

Dabei sind die Komponenten von $\vec{\omega}$ im körperfesten Koordinatensystem gegeben.

Wir können diese Komponenten auch durch die Eulerwinkel im Inertialsystem darstellen.

Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ setzt sich zusammen aus

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\phi + \vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\psi. \quad (814)$$

1. $\vec{\omega}_\phi$ hat im Koordinatensystem (x_I, y_I, z_I) bzw. (x', y', z_I) die Darstellung

$$\vec{\omega}_\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}. \quad (815)$$

Im System (x, y, z) gilt

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_\phi &= \hat{R}_z(\psi) \cdot \hat{R}_{x'}(\theta) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\phi} \sin \theta \\ \dot{\phi} \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \\ \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \\ \dot{\phi} \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (816)$$

2. $\vec{\omega}_\theta$ hat im Koordinatensystem (x', y'', z) die Koordinaten:

$$\vec{\omega}_\theta = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (817)$$

Im System (x, y, z) gilt

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_\theta &= \hat{R}_z(\psi) \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \psi \\ -\dot{\theta} \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (818)$$

3. $\vec{\omega}_\psi$ hat im Koordinatensystem (x, y, z) die Darstellung

$$\vec{\omega}_\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}. \quad (819)$$

Damit erhalten wir für die gesamte Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{pmatrix}. \quad (820)$$

26.2 Stabilität der Euler-Gleichungen

Wir betrachten einen freien rotierenden Körper, auf den kein Drehmoment wirkt. Dann lauten die Euler-Gleichungen

$$\begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 \\ (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3 \\ (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 \end{pmatrix}. \quad (821)$$

26.2.1 Konstante Winkelgeschwindigkeit

Als Körper stellen wir uns ein Buch mit der Breite b (Dimension x), der Höhe h (Dimension y) und der Tiefe t (Dimension z) vor.

Es gilt hierbei $h > b \gg t$.

Die Trägheitsmomente lauten dann

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{M}{12}(h^2 + t^2), \\ I_y &= \frac{M}{12}(b^2 + t^2), \\ I_z &= \frac{M}{12}(h^2 + b^2). \end{aligned} \quad (822)$$

Es gilt hierbei $I_x \approx I_y \ll I_z$, wobei $I_x \neq I_y$.

Für den Fall konstanter Winkelgeschwindigkeiten lauten die Eulergleichungen

$$0 = \begin{pmatrix} (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 \\ (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3 \\ (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 \end{pmatrix}. \quad (823)$$

D.h. wenn z.B. $\omega_1 = \omega_1^0 \neq 0$, dann folgt daraus, dass $\omega_2 = \omega_3 = 0$.

Bei konstanter Winkelgeschwindigkeit, kann also nur eine Komponente der Winkelgeschwindigkeit von Null verschieden sein.

26.2.2 Stabilität der Lösung

Betrachten wir nicht-konstante Winkelgeschwindigkeiten, dann lauten die Euler-Gleichungen

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{I_2 - I_3}{I_1} \omega_2 \omega_3 \\ \frac{I_3 - I_1}{I_2} \omega_1 \omega_3 \\ \frac{I_1 - I_2}{I_3} \omega_1 \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t^2 - h^2}{h^2 + t^2} \omega_2 \omega_3 \\ \frac{b^2 - t^2}{b^2 + t^2} \omega_1 \omega_3 \\ \frac{h^2 - b^2}{h^2 + b^2} \omega_1 \omega_2 \end{pmatrix}. \quad (824)$$

1. Wir betrachten nun kleine Abweichungen von obiger Lösung:

$$\omega_1 \approx \omega_1^0, \quad \omega_2 \ll \omega_1^0, \quad \omega_3 \ll \omega_1^0. \quad (825)$$

Vernachlässigen wir quadratische kleine Terme so ergibt sich $\dot{\omega}_1 = 0$ und daraus $\omega_1 = \omega_1^0 = \text{const.}$ und damit

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b^2 - t^2}{b^2 + t^2} \omega_1^0 \omega_3 \\ \frac{h^2 - b^2}{h^2 + b^2} \omega_1^0 \omega_2 \end{pmatrix}. \quad (826)$$

Damit lautet die DGL für ω_2 und ω_3

$$\begin{aligned}\ddot{\omega}_2 &= \frac{b^2 - t^2}{b^2 + t^2} \frac{h^2 - b^2}{h^2 + b^2} (\omega_1^0)^2 \omega_2 \approx \frac{h^2 - b^2}{h^2 + b^2} (\omega_1^0)^2 \omega_2, \\ \ddot{\omega}_3 &= \frac{b^2 - t^2}{b^2 + t^2} \frac{h^2 - b^2}{h^2 + b^2} (\omega_1^0)^2 \omega_3 \approx \frac{h^2 - b^2}{h^2 + b^2} (\omega_1^0)^2 \omega_3.\end{aligned}\quad (827)$$

Nach Voraussetzung ist $h > b$, damit lautet die DGL

$$\ddot{\omega}_{2,3} \approx +K\omega_{2,3}.\quad (828)$$

Diese Gleichung wird durch

$$\omega_{2,3}(t) = \omega_{2,3}(0)e^{\sqrt{K}t}\quad (829)$$

Hier ist also ein exponentieller Anstieg möglich! Diese Lösung ist als instabil.

2. Wir betrachten nun kleine Abweichungen von einer Rotation um die 2-Achse

$$\omega_2 \approx \omega_2^0, \quad \omega_1 \ll \omega_2^0, \quad \omega_3 \ll \omega_2^0.\quad (830)$$

Vernachlässigen wir quadratische kleine Terme so ergibt sich $\dot{\omega}_2 = 0$ und daraus $\omega_2 = \omega_2^0 = \text{const.}$ und damit

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t^2 - h^2}{h^2 + t^2} \omega_2^0 \omega_3 \\ 0 \\ \frac{h^2 - b^2}{h^2 + b^2} \omega_1 \omega_2^0 \end{pmatrix}.\quad (831)$$

Damit lautet die DGL für ω_1 und ω_3

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= \frac{t^2 - h^2}{h^2 + t^2} \frac{h^2 - b^2}{h^2 + b^2} (\omega_2^0)^2 \omega_1 \approx -\frac{h^2 - b^2}{h^2 + b^2} (\omega_1^0)^2 \omega_1, \\ \dot{\omega}_3 &= \frac{t^2 - h^2}{h^2 + t^2} \frac{h^2 - b^2}{h^2 + b^2} (\omega_2^0)^2 \omega_3 \approx -\frac{h^2 - b^2}{h^2 + b^2} (\omega_1^0)^2 \omega_3,\end{aligned}\quad (832)$$

Nach Voraussetzung ist $h > b$, damit lautet die DGL

$$\ddot{\omega}_{2,3} \approx -K\omega_{2,3}.\quad (833)$$

Diese Gleichung wird durch

$$\omega_{2,3}(t) = \omega_{2,3}(0) \cos \sqrt{K}t.\quad (834)$$

Hier gibt es also nur kleine Oszillationen, die Lösung ist stabil.

3. Wir betrachten nun kleine Abweichungen von einer Rotation um die 3-Achse

$$\omega_3 \approx \omega_3^0, \quad \omega_1 \ll \omega_3^0, \quad \omega_2 \ll \omega_3^0. \quad (835)$$

Vernachlässigen wir quadratische kleine Terme so ergibt sich $\dot{\omega}_3 = 0$ und daraus $\omega_3 = \omega_3^0 = \text{const.}$ und damit

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t^2 - h^2}{h^2 + t^2} \omega_2 \omega_3^0 \\ \frac{b^2 - t^2}{b^2 + t^2} \omega_1 \omega_3^0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (836)$$

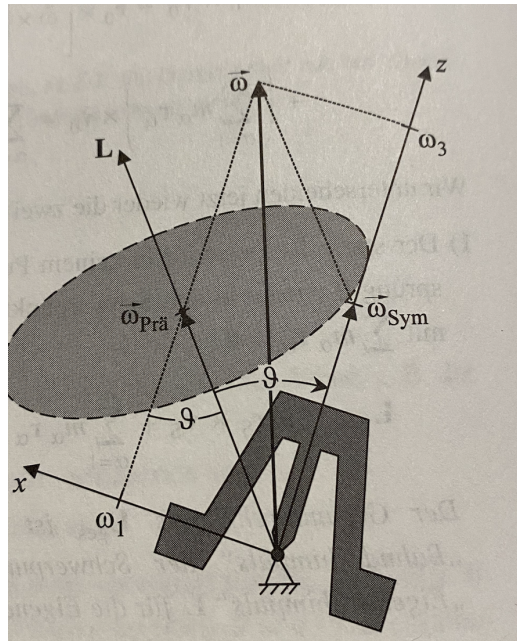
Damit lautet die DGL für ω_1 und ω_2

$$\begin{aligned} \ddot{\omega}_1 &= \frac{t^2 - h^2}{h^2 + t^2} \frac{b^2 - t^2}{b^2 + t^2} (\omega_3^0)^2 \omega_1 \approx -(\omega_2^0)^2 \omega_1, \\ \ddot{\omega}_2 &= \frac{t^2 - h^2}{h^2 + t^2} \frac{b^2 - t^2}{b^2 + t^2} (\omega_3^0)^2 \omega_2 \approx -(\omega_2^0)^2 \omega_2. \end{aligned} \quad (837)$$

Es gibt also wieder kleine Oszillationen.

26.3 Kräftefreier symmetrischer Kreisel

Kreisel: rotierender, starrer Körper der sich nicht wie ein Maschinenteil um eine raumfeste Achse dreht.



Wenn der Kreisel im Schwerpunkt festgehalten wird, dann verursacht die Gravitation kein Drehmoment.

Nachdem Drehimpulssatz

$$\dot{\vec{L}}_{ges.} = \vec{N} \quad (838)$$

ist der Gesamtdrehimpuls konstant.

Weiter legen wir die z -Achse so, dass sie mit einer Hauptträgheitsachse zusammenfällt.

Nun können wir zwei Fälle unterscheiden:

1. Der Drehimpuls und \vec{L} und die z -Achse sind parallel, dann gilt nach

$$L_1 = I_1\omega_1, \quad L_2 = I_2\omega_2, \quad L_3 = I_3\omega_3$$

$\omega_1 = 0 = \omega_2$. Die konstante Winkelgeschwindigkeit ω_3 lautet

$$\omega_3 = \frac{|\vec{L}|}{I_3}. \quad (839)$$

Diese Bewegung tritt auf, wenn der Kreisel nur um die Symmetrieachse in Bewegung gesetzt wird.

2. Der Drehimpuls und \vec{L} und die z -Achse sind nicht parallel, z.B. durch einen Stoß.

Zum Zeitpunkt t wählen wir die y Achse senkrecht zur Ebene die durch \vec{L} und die z -Achse aufgespannt wird. Dann gilt $L_2 = 0$ und auch $\omega_2 = L_2/I_2 = 0$. D.h. nun liegen \vec{L} , $\vec{\omega}$ und die z -Achse in einer Ebene. Daher können wir die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ in zwei Komponenten aufteilen:

- $\vec{\omega}_{Prae}$: parallel zum Drehimpuls \vec{L}
- $\vec{\omega}_{Sym}$: parallel zur z -Achse (Symmetrieachse)

Es gilt

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{Prae} + \vec{\omega}_{Sym}. \quad (840)$$

Nun betrachten wir alle Punkte, die auf der z -Achse liegen und mit den Ortsvektoren $\vec{r}_{(3)}$ beschrieben werden. Für die Geschwindigkeiten dieser Punkte gilt bei der Rotation

$$\vec{v}_{(3)} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{(3)} = \vec{\omega}_{Prae} \times \vec{r}_{(3)}. \quad (841)$$

$\vec{v}_{(3)}$ steht damit senkrecht auf der Ebene die durch \vec{L} , $\vec{\omega}$ und die z -Achse aufgespannt wird.

Die Punkte auf der z -Achse bewegen sich mit $\vec{v}_{(3)}$ auf einem Kreiskegel um den konstanten Drehimpuls \vec{L} . Diese Bewegung wird nicht durch $\vec{\omega}_{Sym}$ beeinflusst und wird reguläre Präzession bezeichnet.

Nach unserer Abbildung gilt

$$\omega_{Prae} = \frac{\omega_1}{\sin \theta} = \frac{L_1}{I_1 \sin \theta} = \frac{L}{I_1}. \quad (842)$$

$\vec{\omega}_{Sym}$ ist die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um die Symmetrieachse. Es gilt

$$\begin{aligned} \omega_3 &= \omega_{Sym} + \omega_{Prae} \cos \theta = \omega_{Sym} + \frac{L \cos \theta}{I_1} = \omega_{Sym} + \frac{L_3}{I_1} \\ \Rightarrow \omega_{Sym} &= \omega_3 - \frac{L_3}{I_1} = \left(1 - \frac{I_3}{I_1}\right) \omega_3. \end{aligned} \quad (843)$$

3. Behandlung mit den Eulergleichungen:

Bei verschwindenden Drehmomenten lauten die Eulergleichungen

$$\begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 \\ (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3 \\ (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 \end{pmatrix}. \quad (844)$$

Da der Kreisel symmetrisch ist, gilt $I_1 = I_2$, somit gilt

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \begin{pmatrix} -\omega_2 \omega_3 \\ \omega_1 \omega_3 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (845)$$

Daraus folgt, dass die Winkelgeschwindigkeit ω_3 konstant ist. Weiter definieren wir

$$\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 \quad (846)$$

und erhalten damit

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 + \omega_2 \Omega &= 0, \\ \dot{\omega}_2 - \omega_1 \Omega &= 0. \end{aligned} \quad (847)$$

Die Lösung dieser Gleichungen ist z.B. durch

$$\begin{aligned}\omega_1(t) &= A \cos(\Omega t + \alpha), \\ \omega_2(t) &= A \sin(\Omega t + \alpha),\end{aligned}\tag{848}$$

gegeben.

Fehlende Themen:

1. Hamilton-Jacobi: 2-Zentren-problem (Kuypers Seite 373) kann nur mit Hamilton Jacobi gelöst werden....
2. Tossing the caber
3. SRT - Übung Weltraum reisen - a la Trisolaris
4. Chaos

Literatur

- [BC99] Anne Whitman Bernahard Cohn. Newton: Principia. *University of California Press*, 1999.
- [Cix17] Liu Cixin. Die drei sonnen. *Heine München*, 2017.
- [LPR20] Alexander Lenz, Maria Laura Piscopo, and Aleksey V. Rusov. Contribution of the Darwin operator to non-leptonic decays of heavy quarks. *JHEP*, 12:199, 2020.
- [Mon20] Richard Montgomery. Das Dreikörperproblem. *Spektrum der Wissenschaft*, 3:12, 2020.
- [Whi97] Michael White. Isaac newton: The last sorcerer. *Fourth Estate London*, 197.